Theoretische Physik I
(Mechanik)
Prof. Wolfgang Kinzel

LaTeX 2_ε-Umsetzung: Leonard Burtscher

24. April 2002

1 Newton'sche Axiome

1.1 Die Newton'schen Gesetze

1. Lex prima: $\vec{p} = m\vec{v} = \text{const.}$
2. Lex secunda: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, meist: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
3. Lex tertia: actio = reactio

1.2 ...in moderner Schreibweise

1. $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{v}(t) = \text{const.}$ (ohne äußere Kräfte)
2. $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$ mit $\vec{p} = m\vec{v}$, wobei m: träge Masse (Widerstand gegen Bewegungsänderung)
3. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Aufgabe aus 2. Gesetz: Löse die gewöhnliche DGL!

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = m\ddot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \text{x(t)} \\ \text{y(t)} \\ \text{z(t)} \end{pmatrix}$$

1.3 Voraussetzungen für die Gültigkeit

- Absoluter Raum (dreidimensionaler Vektorraum) [was nach ART nicht stimmt!]
- Absolute Zeit [stimmt ebenfalls nicht...]
- punktförmige Teilchen [Näherung]
- Vektorraum für Kräfte (d.h. Kräfte können vektoriell überlagert werden): $\vec{F}_{ges} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
- Geeignetes Bezugssystem mit Ursprung $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Bezugssysteme für die das 1. Newton'sche Axiom gilt heißen Inertialsysteme.

2 Eindimensionale Bewegungen

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}(t)\\ \ddot{y}(t)\\ \ddot{z}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_x(x,\dot{x},y,\dot{y},z,\dot{z},t)\\ F_y(x,\dot{x},y,\dot{y},z,\dot{z},t)\\ F_z(x,\dot{x},y,\dot{y},z,\dot{z},t)\end{pmatrix}$$

Drei gekoppelte DGL (engl.: **O**rdinary **D**ifferential **E**quations) zweiter Ordnung.
Annahme:

$$F_x(x,\dot{x},t), F_y(x,\dot{y},t), F_z(z,\dot{z},t)$$

Drei ungekoppelte eindimensionale Bewegungen.

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = F(x(t),\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t),t)$$

2.1 Die Kraft hängt nur von der Zeit ab: $F(t)$

$$\dot{v} = \frac{F(t)}{m}$$

$$\int_{t_0}^{t}\dot{v}(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F_(t')\mathrm{d}t'$$

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(t')\mathrm{d}t'$$

2.1.0.1 Eine Anfangsbedingung $v_0 = v(t=t_0)$

$$\int_{t_0}^{t}v(t')\mathrm{d}t' = x(t) - x(t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'}F(t'')\mathrm{d}t''\mathrm{d}t'$$

2.1.0.2 Zwei Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0, \ddot{x}(t_0) = v_0$ DGL 1. Ordnung geometrisch

$$\dot{v} = \frac{F(v,t)}{m}$$

...ergibt Vektorfeld (zu jedem Punkt die Tangente). Bestimmt durch Anfangsbedingungen.

2.2 Die Kraft hängt nur vom Ort ab: $F(x)$

$$m\ddot{x} = F(x,t)$$

Definition:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x}F(x')\mathrm{d}x' + U_0$$

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = F(x)$$

Erhaltungsgröße Energie
Definition:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E(x(t),\dot{x}(t))$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x(t))$$

$$= \frac{1}{2}m \cdot 2v\dot{v} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\dot{x}$$
$$= v\underbrace{[m\dot{v} - F]}_{=0} = 0$$

E: Energie $U(x)$: potentielle Energie, Potential

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2}mv^2(t) + U(x(t)) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow v(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)}$$

$\Rightarrow v(x)$ ist konstant.

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)$$

(Anfangsbedingungen)

Gesucht $x(t)$. Wir wissen $v(x)$.

Vorgehensweise: Trennung der Variablen

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

„Alles was ’t’ heißt, auf die linke Seite, alles, was ’x’ heißt, auf die rechte Seite!“

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$$

$$\int \mathrm{d}t = t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{v(x')}$$

$$\Rightarrow t(x) \Rightarrow x(t)$$

(Bildung der Umkehrfunktion)

$$t(x) = t_0 \pm \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

wobei E durch Anfangsbedingung $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)$ gegeben.

Integrand divergiert am Umkehrpunkt!

$$E - U(x_L + \delta x) \approx U(x_L) - U(x_L) - U'(x_L) \cdot \Delta x + \ldots \approx |U'(x_L)\Delta x|$$

$\Rightarrow$ Integrand $\approx \frac{1}{\sqrt{x' - x_L}}$

$$y = x' - x_L$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x'$$

$$\int_{x_L}^{x+\Delta x_L} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{x' - x_L}} = \int_0^{\Delta x} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}|_0^{\Delta x} = 2\sqrt{\Delta x} \Rightarrow \sqrt{\Delta x} \propto \Delta x$$

$$\Delta x \propto (\Delta t)^2$$

x_L: Linker Umkehrpunkt

2.2.0.3 Beispiel: Seil auf der Tischplatte

Herunterhängender Teil: $z(t)$

- ρ: Masse pro Länge
- l: Gesamtlänge
- $m = \rho \cdot l$: Gesamtmasse

$F(z) = \rho g z$: Gravitationskraft

$$U(z) = -\frac{\rho g}{2} z^2$$

(vgl. $\frac{\rho g}{2} z^2$: elastische Energie / harmonische Schwingung $\Rightarrow$ sin / cos)
gesucht: Erhaltungsgröße Energie (aus den Anfangsbedingungen)

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\rho g}{2} z_0^2$$

Start

$$t(z) = t_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{\rho g}{z} z'^2)}} = t_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{\frac{z\rho g}{mz}\frac{2E}{\rho g} + z'^2}}$$

Bronstein:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

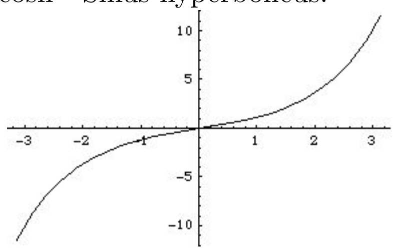
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + C$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

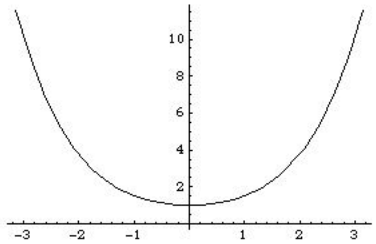
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

2.2.0.4 Graphen zu sinh und cosh

Sinus hyperbolicus:



Cosinus hyperbolicus:



$E > 0$:

$$t(z) = t_0 + \sqrt{\frac{m}{\rho g}} \operatorname{arcsinh}(z\sqrt{\frac{\rho g}{2E}})|_{z_0}^{z}$$

$$\frac{\rho g}{2E} = \frac{\rho g}{\frac{1}{2} g l v_0^2 - \frac{\rho g}{2} z_0^2} = \frac{g}{l v_0^2 - g z_0^2}$$

$$z(t) = \sqrt{\frac{l v_0^2 - g z_0^2}{g}} \sinh((t - t_0)\frac{g}{l} + C)$$

C aus $\sinh(z_0 \cdot \ldots)$
$v_0 = 0$:

$$z(t) = z_0 \cosh[\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)]$$

$z_0 = 0$:

$$z(t) = \sqrt{\frac{l}{g}} v_0 \sinh[\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)]$$

2.3 Kraft hängt nur von der Geschwindigkeit ab (Reibung): $F(v)$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = F(v(t))$$

Trennung der Variablen:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{F(v)} = \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow t(v) - t_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{F(v')}$$

Beispiel: Stoke'sche Reibung

- $F(v) = -rmv$
- $t_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $v(t - t_0) = v_0$

$$\Rightarrow t = m\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v'}{(-rm)v'} = -\frac{1}{r}[\ln v - \ln v_0] = \frac{1}{r}\ln\frac{v_0}{v}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 e^{-rt}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \int_0^t e^{-rt'}\mathrm{d}t' = \frac{v_0}{r}[-e^{-rt}]_0^t = \frac{v_0}{r}(1 - e^{-rt})$$

$$e^{-rt} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{r}$$

Relaxationszeit

$$t \to \infty \Rightarrow x(\infty) = v_0\tau$$

entspr.: Eindringtiefe

2.3.0.5 Beispiel: Newton'sche Reibung

$$F(v) = -\gamma m v^2 v|v|$$

$$t = \frac{m}{\gamma m}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v'}{-v'^2} = \frac{1}{\gamma}(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0})$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{v_0}{\gamma v_0 t + 1}$$

Potenzgesetz, Abfall $\propto \frac{1}{\gamma t}$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \int_0^t \frac{1}{\gamma v_0 t' + 1}\mathrm{d}t'$$

Substitution: $y = \gamma v_0 t; \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma - v_0}$

$$\int \ldots = v_0 \int_0^{\gamma v_0 t} \frac{1}{y+1}\frac{\mathrm{d}y}{y - v_0} = \frac{1}{\gamma} ln(y+1)|_0^{\gamma v_0 t}$$

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} ln(\gamma v_0 t + 1)$$

Kriechverhalten

2.4 Kraft hängt von Ort und Geschwindigkeit ab: $F(x, v)$, ist linear

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2\gamma m\dot{x}$$

x taucht nur in erster Potenz auf $\Rightarrow$ Lineare DGL.

- $m\omega^2 x$: lineare Rückstellkraft vom quadratischen Potential
- $2\gamma m\dot{x}$: lineare Reibung

$$U(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Lineare DGL 2. Ordnung kann aufgeteilt werden in zwei lineare DGLs 1. Ordnung:

1. $\dot{v} + 2\gamma v + \omega^2 x = 0$
2. $\dot{x} - v = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda x, \ddot{x} = \lambda^2 x$$

Zweck: Ableitung wird zum Faktor λ, DGL wird zur algebraischen Gleichung

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2)x = 0$$

$x = 0$ interessiert nicht.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Inhaltsverzeichnis