Physik / Nanostrukturtechnik, 1. Semester

Schwingungen und Wellen

— Zusammenfassung —

Leonard Burtscher

8. Februar 2002

1 Schwingungen

Wirkt auf einen Gegenstand eine zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft, so ergibt sich ein so genannter **harmonischer Oszillator**.

$$F = -Dx$$

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{D}{m}}_{=\omega^2} x = 0$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Zusammenhang zwischen Frequenz f *, Schwingungsdauer T und Kreisfrequenz ω.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Definition der harmonischen Schwingung

Daraus:

*Manchmal auch (veraltet) mit ν bezeichnet.

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

und

$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Schwingungsdauer und Frequenz einer harmonischen Schwingung

Wichtig: Bei der harmonischen Schwingung hängen Frequenz und Schingungsdauer nicht von der Amplitude ab.

1.0.1 Energiebilanz bei harmonischen Schwingungen

$$E_{ges} = \frac{1}{2}kA^2$$

Die gesamte Energie ist gleich der maximalen potentiellen (oder kinetischen) Energie einer Feder. A ist hierbei die maximale Auslenkung.

Wichtig: Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist dem Quadrat der Amplitude proportional: $E_{ges} \propto A^2$.

1.1 Das mathematische Pendel

$$-mg \sin\phi = -mg \sin\frac{s}{l} = m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Schwingungsdifferentialgleichung und Schwingungsdauer des mathematischen Pendels. Darin ist ϕ der Winkel zwischen der aktuellen Position des Pendels und der Ruhelage des Pendels, l ist die Länge des Pendels.

1.2 Das Torsionspendel

Analog dem „linearen“ Pendel gilt beim Dreh- oder Torsionspendel:

$$M = -D\phi^{\dagger}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

Schwingungsdauer des Torsionspendels

1.3 Gedämpfte Schwingungen

$$\underbrace{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}_{Trägheitskraft} + \underbrace{2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{Reibungskraft} + \underbrace{Dx}_{Rückstellkraft} = 0$$

Aus der Lösung der Differentialgleichung ergibt sich für λ (Lösung der DGL mittels D'Alembert-Ansatz):

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{=\omega}$$

Man unterscheidet drei Fälle:

- **Schwache Dämpfung:** $\beta < \omega_0$, damit komplexe Lösung der DGL: $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \mathrm{i}\omega$. Die Kombination beider komplexen Lösungen ergibt z.B.: $x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t)$.
- **Starke Dämpfung (überkritische Dämpfung):** $\beta > \omega_0$, Körper „kriecht“ in die Ruhelage zurück. Der Radikand ist positiv: $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Die Kombination beider Lösungen ergibt z.B.: $x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\sinh(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t)$.
- **Aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung):** $\beta = \omega_0$, Körper bewegt sich auf dem schnellstmöglichen Weg in die Ruhelage und bleibt dort. Der Radikand verschwindet, d.h.: $\lambda_{1,2} = -\beta$. Die allgemeine Lösung (durch Superposition beider speziellen Lösungen) ist dann: $x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\beta t}$.

† **Achtung:** Die Einheit von D ist dabei natürlich N/rad.

1.4 Erzwungene Schwingungen

$$\underbrace{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}_{Trägheitskraft} + \underbrace{2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{Reibungskraft} + \underbrace{Dx}_{Rückstellkraft} = \underbrace{F_0\cos(\omega t)}_{äußereKraft}$$

Lösungsansatz:

$$x(t) = \underbrace{A_1\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_1 t) + \phi_1)}_{anfängliche\,Schwingung} + \underbrace{A_2\cos(\omega t + \phi)}_{Erregerschwingung}$$

Nach dem Einschwingvorgang bleibt

$$x(t) = A_2\cos(\omega t + \phi)$$

1.5 Gekoppelte Schwingungen (ohne Reibung)

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + Dx_1 - D^*(x_2 - x_1) = 0$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + Dx_2 + D^*(x_2 - x_1) = 0$$

Lösen durch

$$x_1 = A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$
$$x_2 = A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

Die beiden möglichen Kreisfrequenzen sind:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{m}}$$

2 Wellen

Man unterscheidet zwischen Wellen, bei denen die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung erfolgt (**Transversal-** oder **Querwellen**, z.B. EM-Wellen) und Wellen, bei denen die Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung erfolgt (**Longitudinal-** oder **Längswellen**, z.B. Schallwellen).

2.1 Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen. Darin ist F die Kraft, μ die Massenbelegung, σ die Zugspannung und ρ die Massendichte.

Eine sinusförmige Welle bezeichnet man als **harmonische Welle**.

Bei einer harmonischen Welle gilt:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit einer harmonischen Welle

2.2 Wellenfunktion

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Wellenfunktion einer harmonischen Welle (als Lösung der Wellen-DGL, siehe unten). Darin ist k die Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$.

$$y(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Wellenfunktion der harmonischen Welle in Abhängigkeit von λ und T.

2.3 Energieübertragung durch Wellen

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v^2$$

Die durch eine harmonische Welle übertragene Leistung

2.4 Stehende Wellen

Eine stehende Welle entsteht wenn sich zwei entgegengesetzt laufende Wellen gleicher Amplitude und gleicher Frequenz, aber mit Phasenverschiebung $\delta = \pi$ überlagern. Es ergibt sich die Wellenfunktion:

$$y(x,t) = y_R + y_L = \underbrace{A\sin(kx-\omega t)}_{nach\,rechts\,laufende\,Welle} + \underbrace{A\sin(kx+\omega t)}_{nach\,links\,laufende\,Welle}$$

Nach Anwendung des Additionstheorems für die Summe zweier Winkel folgt schließlich:

$$y_n(x,t) = A_n \cos(\omega_n t)\sin(k_n x)$$

Wellenfunktion stehender Wellen

2.5 Wellengleichung

Die Wellenfunktion ist die Lösung der Wellen-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

2.6 Dopplereffekt

Schall der von bewegter Quelle ausgesandt wird:

$$\lambda = \frac{1}{f_0}(v-u_Q)$$

$$f' = \frac{v}{\lambda} = \frac{vf_0}{v-u} = \frac{f_0}{1-\frac{u_Q}{v}}$$

3 Quellen

- **Tipler, Paul A.:** Physik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2000
- H. Vogel: Gerthsen Physik, Springer
- Hammer

Inhaltsverzeichnis