Physik / Nanostrukturtechnik, 1. Semester

Mechanik

— ZUSAMMENFASSUNG —

Leonard Burtscher

8. Februar 2002

1 Mechanik

1.1 Translationsbewegungen

$$x$$

Ort

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Geschwindigkeit

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Beschleunigung

1.1.1 Bewegungsgleichungen

$$v = at + v_0$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0{}^{*\dagger}$$

---

[*] Wie man sich leicht durch Integration selbst überzeugt ist $v = \int a\,\mathrm{d}t = at + v_0$ und $x = \iint a\,\mathrm{d}^2 t = \int at + v_0\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

[†] Aus den beiden Bewegungsgleichungen lässt sich eine Beziehung für Geschwindigkeit, Beschleunigung

1.2 Die Newtonschen Axiome

1.2.1 Erstes Newtonsches Axiom: Trägheitsprinzip

Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn einwirkt (die resultierende Kraft ist die Vektorsumme aller Kräfte, die an einem Körper angreifen):

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

1.2.2 Zweites Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

oder

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

1.2.3 Drittes Newtonsches Axiom: Reaktionsprinzip

Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn Körper A eine Kraft auf Körper B ausübt, so wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A.

1.3 Reibung

Man unterscheidet zwischen **Haft-**, **Gleit-** und **Rollreibung**.

$$\vec{F}_H \leq \mu_H \vec{F}_N$$

und Ort herleiten: $v^2 - v_0^2 = 2ax$

Haftreibung (μ_H ist die **Haftreibungszahl**)

$$\vec{F}_G = \mu_G \vec{F}_N$$

Gleitreibung (μ_G ist die **Gleitreibungszahl**)

$$\vec{F}_R = \mu_R \vec{F}_N$$

Rollreibung (μ_R ist die **Rollreibungszahl**)
Es gilt:

$$\mu_R < \mu_G < \mu_H$$

Außerdem

$$\vec{F}_R = 6\pi\eta r\vec{v}$$

Stokes-Reibung

1.4 Arbeit und Energie

1.4.1 Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}| \cos\phi$$

Definition der Arbeit (dabei ist ϕ der Winkel zwischen dem Kraft- und dem Wegvektor).
Diese Definition ist nur für eine konstante Kraft anwendbar.
Bei veränderlicher Kraft:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \,\mathrm{d}x$$

1.4.2 Energie

Energie ist gespeicherte Arbeit.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Kinetische Energie

$$E_{elast} = \frac{1}{2}kx^2$$

Potentielle Energie einer Feder

$$E_{pot} = mgh$$

Potentielle oder Lageenergie im Gravitationsfeld der Erde

Allgemein:

$$\vec{F} = -\text{grad} E_{pot} = -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}, \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}, \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\right)^T$$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}x}$$

1.4.3 Gleichgewichtslagen

Eine konservative Kraft (eine Kraft, die ein Potential aufbauen kann) neigt immer dazu, ein Teilchen in Richtung der kleiner werdenden potentiellen Energie zu beschleunigen. Ein Teilchen findet sich in einer Gleichgewichtslage, wenn die resultierende Kraft auf das Teilchen null ist. Dabei unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Arten des Gleichgewichts:

- Bei einem **stabilen Gleichgewicht** führt eine kleine Auslenkung zu einer Rückstellkraft, die das Teilchen in Richtung der Gleichgewichtslage bewegt. Beispiel: Masse an Feder in Gleichgewichtslage.
- Bei einem **labilen** oder **instabilen Gleichgewicht** gibt es immer eine Bewegungsrichtung, in der eine kleine Auslenkung zu einer Kraft führt, die das Teilchen von der Gleichgewichtslage weg bewegt. Beispiel: Pendel bei der Auslenkung $\phi = \pi$.
- Bei einem **indifferenten Gleichgewicht** führt eine kleine Auslenkung nicht zu einer dann einwirkenden Kraft. Das Teilchen befindet sich somit weiterhin in einer Gleichgewichtslage. Beispiel: Massestück auf einem Tisch.

1.4.4 Kraftfeld und Potential

Durch die Verschiebung eines Körpers in einem konservativen Kraftfeld wird die potentielle Energie des Körpers erhöht.

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn die verrichtete Arbeit entlang jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist (Beispiel: Gravitationsfeld):

$$\oint \vec{F} \mathrm{d}\vec{s} = \vec{0}$$

1.4.5 Erhaltungssätze

$$E = E_{kin} + E_{pot} = constans.$$

Energieerhaltungssatz der Mechanik (gilt nur, wenn keine dissipativen (= nicht-konservativen) Kräfte wirken!)

$$E_{ein} - E_{aus} = \Delta E_{sys}$$

Energieerhaltungssatz (dabei ist E_{ein} die Energie, die dem System zugeführt, E_{aus} die Energie, die das System abgibt.)

1.4.6 Leistung

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Definition der Leistung

1.5 Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definition des Impulses

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Impuls eines Teilchens

$$\vec{p}_{ges} = m_{ges}\vec{v}_S = \sum_i m_i\vec{v}_i = constans.$$

Impulserhaltung

$\Rightarrow$ Wirkt auf ein System keine resultierende äußere Kraft, dann ist die Geschwindigkeit seines Massenmittelpunkts konstant und der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten: $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$.

1.5.1 Der Massenmittelpunkt

$$m_{ges}\vec{r}_S = \sum_i m_i\vec{r}_i$$

Definition des Massenmittelpunkts (dabei ist $\vec{r}_S$ der Ortsvektor des Massenmittelpunktes).

bzw.

$$m_{ges}\vec{r}_S = \int \vec{r}\mathrm{d}m$$

$$\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = m_{ges}\vec{a}_S$$

Zweites Newtonsches Axiom für ein System von Teilchen

$\Rightarrow$ Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich unter dem Einfluss der resultierenden äußeren Kraft wie eine Teilchen mit der Masse $m_{ges} = \sum m_i$.

1.5.2 Stöße

Man unterscheidet – je nachdem, ob die kinetische vollständig, teilweise oder überhaupt nicht erhalten bleibt – drei verschiedene Arten von Stößen:

- Wenn die gesamte kinetische Energie von zwei Körpern vor und nach dem Stoß die gleiche ist, spricht man von einem **elastischen Stoß**.
- Ist die gesamte kinetische Energie nach dem Stoß verändert, so liegt ein **inelastischer Stoß** vor. Inelastische Stöße treten zwischen makroskopischen Systemen auf, wenn nicht-konservative Kräfte wirken, die die Gesamtenergie des Systems verändern.
- Bei einem **vollständig inelastischen Stoß** geht die gesamte kinetische Relativenergie (d.h. die kinetische Energie der Teilchen im Schwerpunktsystem) verloren.

1.5.3 Kraftstoß und zeitliches Mittel einer Kraft

$$\Delta\vec{p} = \int\limits_{t_a}^{t_e} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_e} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \vec{p}_e - \vec{p}_a$$

Kraftstoß oder Impulsübertrag $\Delta\vec{p}$

$$< \vec{F} >= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_a}^{t_e} \vec{F} \, \mathrm{d}t$$

Zeitliches Mittel einer Kraft

1.5.4 Raktenantrieb

Der Raketen- oder Strahlantrieb ist eine Anwendung des dritten Newtonschen Axioms und der Impulserhaltung. Durch Lösen der Gleichung der Impulserhaltung kommt man schließlich zur sog. **Raketengleichung**:‡

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u_{aus} \left| \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \right| + F_{ext}$$

Raktengleichung

Dabei wird die Größe $u_{aus}|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|$ **Schubkraft** oder **Schub** der Rakete genannt:

$$F_{Sch} = u_{aus} \left| \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \right|$$

Schubkraft

‡**Wichtig**: Um aus der Gleichung der Impulserhaltung ($p_e = (m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m|(v - u_{aus})$) zur Raketengleichung zu gelangen muss (nach dem Ausmultiplizieren) der Term $|\Delta m| \Delta v$ weggelassen werden. Diese Termin kann vernachlässigt werden, da es sich um zwei sehr kleine Größen handelt.

1.6 Rotationsbewegungen

1.6.1 Gegenüberstellung Translations- / Rotationsbewegungsgrößen

<table>
<tr><th>Translation</th><th>Rotation</th></tr>
<tr><td>x
Ort</td><td>ϕ
Winkel</td></tr>
<tr><td>$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
Geschwindigkeit</td><td>$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}$
Winkelgeschwindigkeit</td></tr>
<tr><td>$a = \dot{v} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$
Beschleunigung</td><td>$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\phi}$
Winkelbeschleunigung</td></tr>
<tr><td>m
Masse</td><td>I
Trägheitsmoment</td></tr>
<tr><td>$\vec{F}$
Kraft</td><td>$\vec{M}$
Drehmoment</td></tr>
<tr><td>$\vec{p} = m\vec{v}$
Impuls</td><td>$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Drehimpuls</td></tr>
<tr><td>$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$</td><td>$P$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leistung</td></tr>
<tr><td>$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$</td><td>$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = I\vec{\alpha}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zweites Newtonsches Gesetz</td></tr>
<tr><td>$E_{kin,trans} = \frac{1}{2}mv^2$</td><td>$E_{kin,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kinetische Energie</td></tr>
<tr><td>$v = v_0 + at$
$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
$v_2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$</td><td>$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$\phi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bewegungsgesetze</td></tr>
</table>

1.6.2 Kreisbewegung

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{a}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Coriolis-Beschleunigung

1.6.3 Drehmoment, Trägheitsmoment und Drehimpuls

Der senkrechte Abstand zwischen der Wirkungslinie einer Kraft und der Drehachse heißt **Hebelarm** l einer Kraft. Das Produkt aus Kraft und Hebelarm heißt **Drehmoment** M.

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$$ [§]

Drehmoment M

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Drehimpuls L

Das resultierende auf ein System ausgeübte Drehmoment ist gleich der Änderung des Drehimpulses des Systems.

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Trägheitsmoment I

Das Trägheitsmoment hängt von der Massenverteilung des Körpers relativ zur Drehachse ab. r ist dabei der Abstand der Masse m_i von der Drehachse.

Für Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung verwendet man zur Berechnung des Trägheitsmoments:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$

Häufig will man das Trägheitsmoment eines Körpers zu einer Achse, die parallel zur Achse durch den Massenmittelpunkt ist, bestimmen. Dafür eignet sich der **Steinersche Satz**:

$$I = I_S + M_{ges} r^2$$

Hierbei ist I_S das Trägheitsmoment durch die Achse durch den Massenmittelpunkt und r der Abstand des Massenmittelpunkts zur momentanen Drehachse.

Einige wichtige / häufig benötigte Trägheitsmomente:

- Zylindermantel (bei Drehung um Körperachse): $I = m_{ges} r^2$

[§] Dabei ist mit $\vec{r} \times \vec{F}$ das Vektorprodukt aus den beiden Vektoren Radius und Kraft gemeint. Das Vektorprodukt berechnet sich aus den Beträgen der beiden Vektoren multipliziert mit dem Sinus des (kleinsten) Zwischenwinkels: $|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin\phi$

- Massiver Zylinder (bei Drehung um Körperachse): $I = \frac{1}{2} m_{ges} r^2$
- Dünner Stab (bei Drehung durch ein Ende $\perp$ Körperachse): $I = \frac{1}{3} m_{ges} l^2$
- Dünne Kugelschale (bei Drehung um eine Achse durch Mittelpunkt): $I = \frac{2}{3} m_{ges} r^2$
- Massive Kugel (bei Drehung um eine Achse durch den Mittelpunkt): $I = \frac{2}{5} m_{ges} r^2$
- Massiver Quader (bei Drehung um Drehachse durch den Mittelpunkt und $\perp$ Oberfläche): $I = \frac{1}{12} m_{ges}(a^2 + b^2)$

1.6.4 Rollende Körper

$$v_S = R\omega$$

Rollbedingung, hierbei ist v_S die (lineare) Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts.

1.7 Gravitation

1.7.1 Keplersche Gesetze

1. Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.
2. Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne: $T^2 \propto r^3$.

1.7.2 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Newtons Gravitationsgesetz, dabei ist die Gravitationskonstante $G = 6,670 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. r ist der Abstand der Massen, $\frac{\vec{r}}{r}$ ist der Vektor von m_1 zu m_2.

Daraus ergibt sich die Schwerebeschleunigung der Erde zu $g = 9,81 m/s^2$. Zum Vergleich: $g_{Mond} \approx \frac{1}{6} g_{Erde}$.

1.7.3 Potentielle Energie im Gravitationsfeld

$$E_{pot}(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_{pot} = 0 \text{ für } r \to \infty$$

1.8 Mechanik deformierbarer Körper

1.8.1 Dichte

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Definition der Dichte eines Körpers

1.8.2 Spannung und Dehnung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Zugspannung oder Spannung σ

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

relative Längenänderung oder Dehnung ϵ

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{\Delta l/l}$$

Das Elastizitätsmodul E ist das Verhältnis von Spannung σ zu Dehnung ϵ.

Wenn eine Kraft in Richtung der Oberfläche angreift bewirkt sie eine Scherspannung:

$$\tau = \frac{F_S}{A}$$

Scherspannung τ

$$\gamma = \frac{\Delta x}{l} = \tan\theta$$

Scherung γ.

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_S/A}{\Delta x/l} = \frac{F_S/A}{\tan\theta}$$

Das Verhältnis von Scherspannung zu Scherung heißt Schubmodul oder Torsionsmodul G.

1.8.3 Druck in einer Flüssgikeit

$$p = \frac{F}{A}$$

Druck in einer Flüssigkeit

$$K = -\frac{p}{\Delta V/V}$$

Das Kompressionsmodul K ist das Verhältnis von Druck zu relativer Volumenänderung.

$$\kappa = \frac{1}{K}$$

Der Kehrwert des Kompressionsmoduls ist die Kompressibilität κ.

$$p = p_0 + \rho g h$$

p ist der Schweredruck des Wassers in Abhängigkeit vom Außendruck p_0 und der Höhe unter der Wasseroberfläche ($\rho = const.$).

Ein Körper, der teilweise oder vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, erfährt eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.

Archimedisches Prinzip

1.8.4 Oberflächenspannung und Kapillarität

$$F = 2\gamma l + mg$$

Oberflächenspannung

Die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen in einer Flüssigkeit heißen **Kohäsionskräfte**. Die Kraft zwischen einem Flüssigkeitsmolekül und einer anderen Substanz, wie zum Beispiel der Wand einer dünnen Röhre, heißt **Adhäsionskraft**. Wenn die Adhäsionskraft groß ist im Vergleich zur Kohäsionskraft, wie zum Beispiel bei Wasser und einer Glasfläche, dann sagt man, dass die Flüssigkeit die Oberfläche der anderen Substanz benetzt.

1.8.5 Fluiddynamik, Bernoulli-Gleichung

$$\dot{V} = vA = \text{constans}$$

Kontinuitätsgleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constans}$$

Bernoulli-Gleichung

Venturi-Effekt: Wenn die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit zunimmt, fällt der Druck.

1.8.6 Viskose Strömung

$$F = \eta \frac{vA}{d}$$

Darin ist v die Geschwindigkeit einer Platte der Fläche A, die im Abstand d von einer ruhenden Platte gezogen wird. Der Raum dazwischen ist mit einer Flüssigkeit mit der Viskosität / Zähigkeit η (in Pa s) gefüllt. F ist die Kraft, die benötigt wird, um die Platte zu ziehen.

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4}\dot{V}$$

Gesetz von **Hagen-Poiseuille**

$$Re = \frac{2r\rho v}{\eta}$$

Die **Reynolds-Zahl** ist ein Maß für die Turbulenz einer Strömung.

A Einheiten und Größen

A.1 Mechanik

- $1\mathrm{J} = 1\mathrm{Nm}$[¶]
- $1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\mathrm{W}$[‖]
- $1\mathrm{Pa} = 1\mathrm{N/m}^2; 1\mathrm{atm} = 101,325\mathrm{kPa} = 760\mathrm{mmHg} = 760\mathrm{Torr}; 1\mathrm{bar} = 10^5\mathrm{Pa}$

[¶] früher gebräuchlich: $1\mathrm{cal} = 4,184\mathrm{J}$. 1 cal ist die Arbeit, die benötigt wird, um 1g Wasser um 1 ℃ zu erwärmen.

[‖] früher gebräuchlich: $1\mathrm{PS} = 75g \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 735\mathrm{W}$

B Quellen

- **Tipler, Paul A.:** Physik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2000
- H. Vogel: Gerthsen Physik, Springer
- Hammer

Inhaltsverzeichnis