

Fortgeschrittenenpraktikum SS 2004

Magnetische Kernresonanz

Leonard Burtscher, Johannes Pernpeintner

4. März 2004

Physikalisches Institut der Universität Würzburg
Betreuer: Dr. G. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Theorie und Versuchsaufbau	3
2.1. Der Spin des Protons	3
2.2. Der Spin im Magnetfeld	4
2.3. Versuchsaufbau	4
2.4. Bloch-Gleichungen	4
3. Versuchsdurchführung	6
3.1. Aufgabe 2: Signalhöhe gegen Impulsabstand	6
3.2. Aufgabe 4: Linearität von Signalhöhe und Magnetfeld	8
3.3. Aufgabe 5: Spindrehung	8
3.4. Aufgabe 6: Bestimmung der Resonanzbreiten zu verschiedenen Drehwinkeln	9
3.5. Aufgabe 8: Messung von Betrag und Winkel des Störfeldes	13
3.6. Aufgabe 9: Bloch-Siegert-Theorie	16
3.7. Aufgabe 11: Stellung des Spindetektors relativ zum Polarisiermagneten	17
3.8. Aufgabe 12: Bestimmung der Relaxationszeit und Fließgeschwindigkeit	17
A. Konstanten	20
Literatur	21

1. Einleitung

NMR-Bildgebung hat in jüngster Zeit durch die Ermöglichung der nicht-invasiven Diagnostik in der Medizin eine große Popularität erhalten. In der Chemie sind außerdem schon länger Verfahren etabliert, um mit Hilfe der kernmagnetischen Resonanz Informationen über die Struktur von Molekülen zu erhalten.

In diesem Versuch beschäftigen wir uns mit den Grundlagen der magnetischen Kernresonanz.

2. Theorie und Versuchsaufbau

Da sich die folgenden theoretischen Überlegungen eng am Versuchsaufbau orientieren, beschreiben wir diesen bereits im Theorie-Kapitel.

2.1. Der Spin des Protons

Genau wie Elektronen besitzen Protonen einen Spin $I = \frac{1}{2}\hbar$, der in der klassischen Betrachtung als Eigendrehimpuls \vec{L} dargestellt wird. Der Anschaulichkeit halber verwenden wir in der weiteren theoretischen Beschreibung das semi-klassische Bild.

Darin ist der Eigendrehimpuls gequantelt, für die zugehörige Quantenzahl J gilt:

$$J = \frac{I}{\hbar} \quad (1)$$

J kann beim Proton die Werte $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ annehmen. Da das Proton wie das Elektron auch eine elektrische Ladung trägt, resultiert aus dem Eigendrehimpuls ebenfalls ein magnetisches Moment. Normalerweise wird dessen Betrag in z -Richtung μ_z als μ angegeben.

$$\mu_z = \mu = g_{\text{Proton}}\mu_N J \quad (2)$$

Darin ist g_{Proton} der so genannte g -Faktor des Protons, der die Abweichung vom klassisch erwarteten magnetischen Moment beschreibt. μ_N ist das Kernmagneton.

Der Zusammenhang zwischen Spinquantenzahl und magnetischem Moment lässt sich auch über das gyromagnetische Verhältnis

$$\gamma = \frac{\mu}{J\hbar} \quad (3)$$

ausdrücken.

$$\mu = \gamma J\hbar \quad (4)$$

2.2. Der Spin im Magnetfeld

Gibt man durch ein Magnetfeld \vec{B} eine Richtung vor, so hat der Spin (Eigendrehimpuls) zwei Einstellmöglichkeiten: Parallel oder Antiparallel zum magnetischen Feld. Den beiden Einstellungen entsprechen gemäß Zeemann unterschiedliche Energien, nämlich:

$$E = -\mu_z B \quad (5)$$

Der Energieunterschied zwischen den beiden möglichen Zuständen ist bei einem Proton also:

$$\Delta E = g_{\text{Proton}} \mu_N \Delta J B = g_{\text{Proton}} \mu_N B \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = g_{\text{Proton}} \mu_N B \quad (6)$$

Wird nun ein Photon der Energie $\Delta E = \hbar\omega$ vom Proton absorbiert, so kann es seinen Spin vom niedrigeren zum höheren Energieniveau umklappen. Die Frequenz des Photons ist also

$$\omega = g \frac{\mu_N}{\hbar} B = \gamma B \quad (7)$$

Diese Frequenz entspricht der Frequenz der Larmor-Präzession eines klassischen magnetischen Dipols.

2.3. Versuchsaufbau

Wasser fließt aus einem Behälter in einem Kunststoffschlauch durch einen Polarisiermagneten (Polarisator), danach in einen zuschaltbaren Manipulier-Magneten (Manipulator) und schließlich in die Analysier-Anordnung (Analysator) und endlich wieder in den Vorratsbehälter.

Im Polarisiermagneten werden die Protonen-Spins ausgerichtet, es folgt die Magnetisierung M . Ihre Richtung bezeichnen wir mit z . Im Manipulator kann die Polarisation der Protonen verändert werden. Die Änderung der Polarisation in z -Richtung wird im Analysator registriert, der aus einem Permanentmagneten und einem parallel überlagerten Wobbfeld besteht, das 100 Mal pro Sekunde Resonanz zu den Protonenspins herstellt. Diese Resonanz wird mit einem Spindetektor gemessen, der im Wesentlichen aus einem Schwingkreis besteht, der mit einem Regelkreis auf konstanter Amplitude gehalten wird. Durch die Spule des Schwingkreises fließt das Wasser. Da bei Resonanz Energie aus dem Schwingkreis auf die Spins übertragen wird, liefert der Regelkreis diese Energie nach. Waren die Spins vorher schon ausgerichtet, so muss weniger Energie nachgeliefert werden. Der Energiefluss ist somit ein Maß für die Polarisation der Spins. Dieser Energiefluss wird über einen „Sample and Hold“-Verstärker an einem Oszillographen oder einem PC gemessen.

2.4. Bloch-Gleichungen

Die quantitative Erklärung der magnetischen Kernresonanz liefern die Bloch-Gleichungen. Eine ausführliche Herleitung findet sich in [3], hier die für das Experiment wichtigen Ergebnisse:

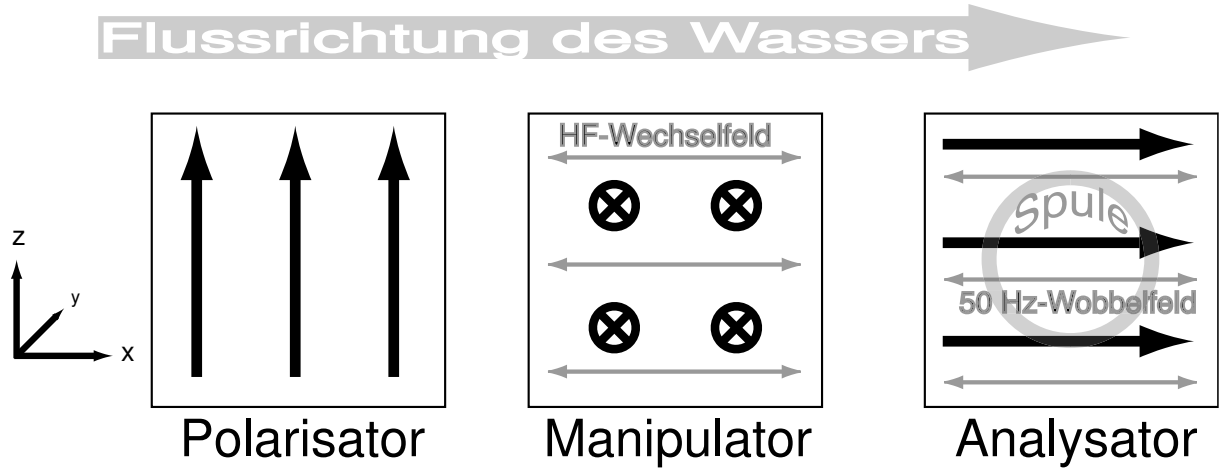


Abbildung 1: Orientierung der im Versuch verwendeten Magnetfelder. Dicke schwarze Pfeile geben die Richtung der permanenten Magnetfelder an, dünne graue die Richtung der Wechselfelder. Die Spule dient als Spindetektor; ihre Achse steht in y -Richtung.

Auf dem Weg vom Polarisator zum Manipulator relaxiert die Magnetisierung von M auf M_0 . Nach Durchlaufen des Hochfrequenzfeldes hat sich diese Magnetisierung M_0 geändert und beträgt $M_z(\Phi)$. Φ ist der Drehwinkel, um den die Spins im Manipulator gedreht werden.

$$\Phi = \gamma B_1 \tau_\nu \quad (8)$$

$$\frac{M_z(\Phi, u)}{M_0} = \frac{1}{1 + u^2} \left[u^2 + \cos \left(\Phi \sqrt{1 + u^2} \right) \right] \quad (9)$$

Mit

$$u = \frac{\Delta\omega}{\gamma B_1} \quad (10)$$

Zur Auswertung wird noch folgende Beziehung für die Wahrscheinlichkeit einer Drehung eines Spins um den Winkel Φ benötigt, die die Dephasierung der Spins beschreibt:

$$W(\Phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi c \Phi_0}} \cdot \exp \left(-\frac{(\Phi - \Phi_0)^2}{c \Phi_0} \right) \quad (11)$$

wobei Φ_0 der mittlere Drehwinkel und c ein Parameter für die Größe der Dephasierung ist. Insgesamt ergibt sich für die im Analysator gemessene relative Magnetisierung:

$$\frac{M_z(\Phi, u)}{M_0} = \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^2} \left[u^2 + \cos \left(\Phi \sqrt{1 + u^2} \right) \right] W(\Phi) d\Phi \quad (12)$$

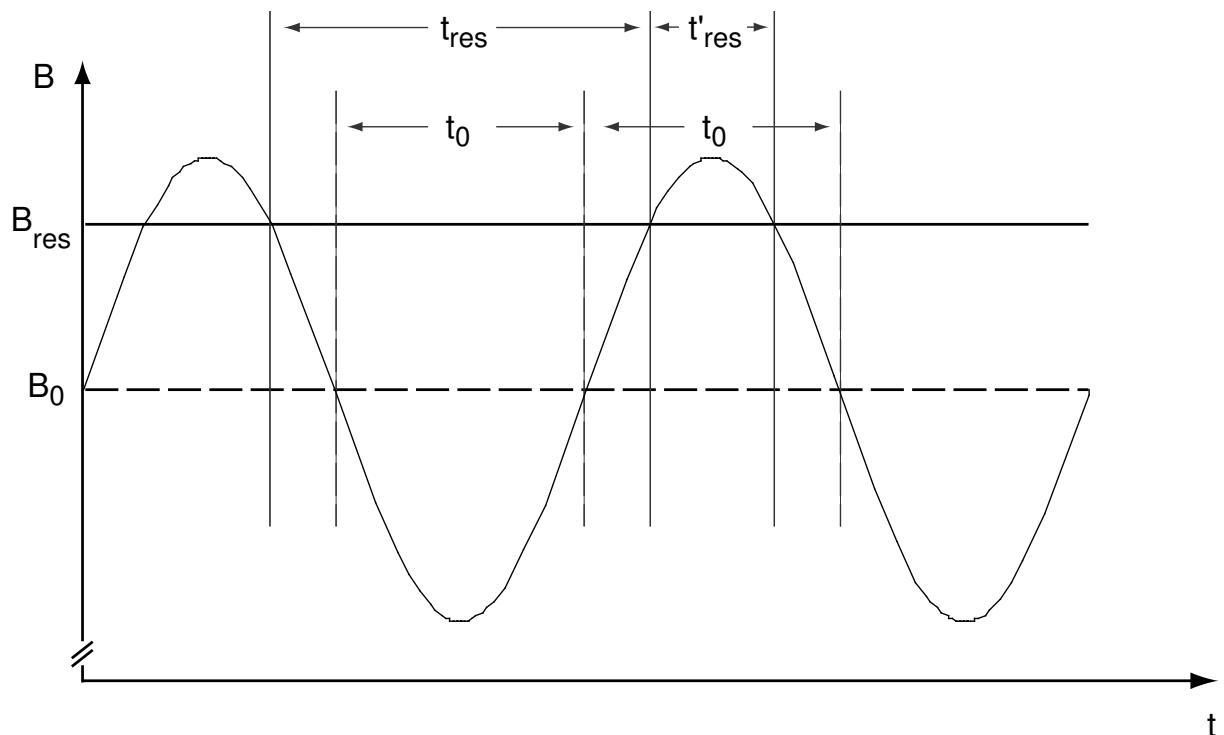


Abbildung 2: Abstand der Resonanzpeaks bei verschiedener magnetischer Induktion. Das konstante Magnetfeld B_0 ist genau auf die Resonanzfrequenz des Analysators ω_0 eingestellt. B_0 ist ein Wobbfeld überlagert. Wird die Analysatorfrequenz verändert, so verschiebt sich die Resonanz zu einer anderen magnetischen Induktion B_{res} . Bei $\omega = \omega_0$ sind die Resonanzpeaks äquidistant ($t_0 = 10ms$). Ist die Frequenz des Schwingkreises, die im Experiment variiert wird, verändert, so wird das für die Resonanz passende Magnetfeld nicht mehr in äquidistanten zeitlichen Abständen erreicht: $t_{res} \neq t'_{res}$.

3. Versuchsdurchführung

3.1. Aufgabe 2: Signalthöhe gegen Impulsabstand

Zunächst messen wir die Signalthöhe des Sample and Hold-Verstärkers für verschiedene Impulsabstände (siehe Abbildung 2). Bei ungleichen Impulsabständen erhält man unterschiedlich große Signalstärken (siehe Abbildung 3 und Tabelle 1), weil unterschiedlich viele unveränderte Spins im Analysatormagneten vorhanden sind. Die nach t_{res} gemessene Signalstärke ist größer als die nach t'_{res} gemessene, da $t_{res} > t'_{res}$ und damit in t_{res} mehr unbeeinflusste Spins in den Analysatormagneten nachfließen konnten.

3. Versuchsdurchführung

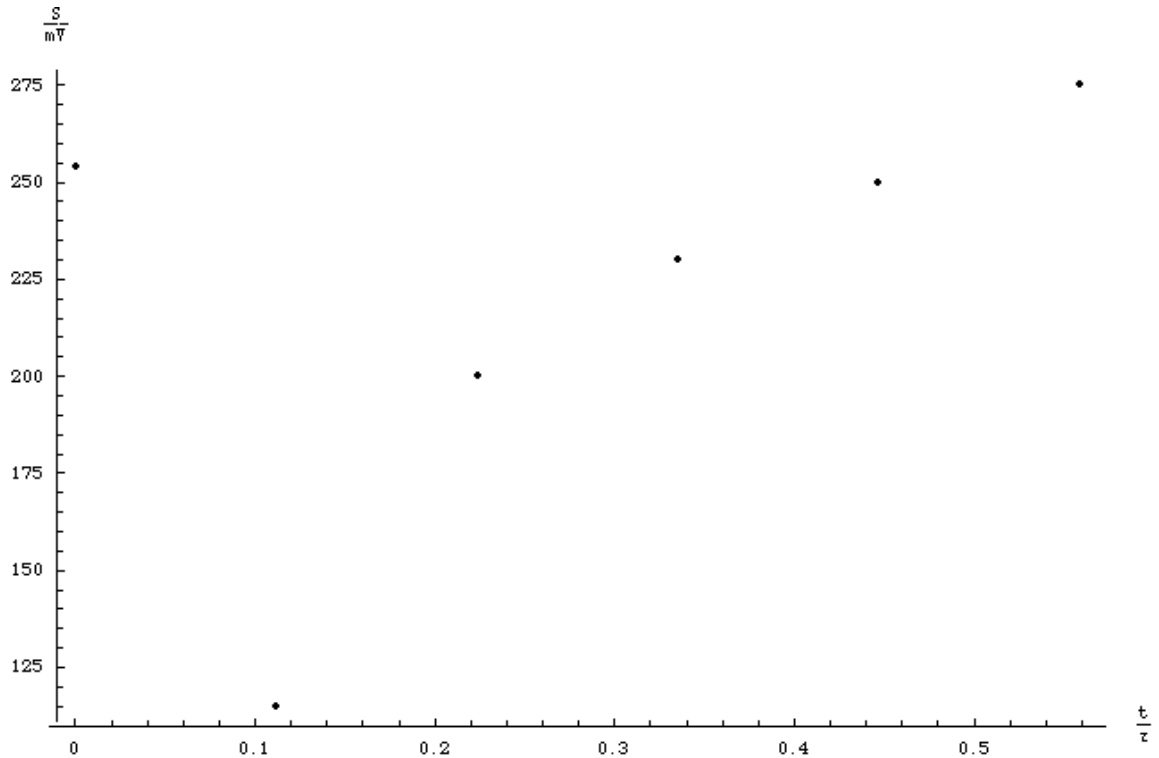


Abbildung 3: Signalthöhe S über relativen Impulsabstand $\frac{t}{\tau}$ mit der Austauschzeit $\tau = \frac{l}{v}$, wobei $l = 1.5\text{cm}$: Länge der Detektorspule und $v = 0.84\frac{\text{m}}{\text{s}}$: Fließgeschwindigkeit des Wassers (aus 3.8 auf Seite 17). Bei $\frac{t}{\tau} = 0$ sind die beiden Impulse ununterscheidbar. Aufgrund des größeren zeitlichen Abstandes zum Vorgängerimpuls sollte dieser aber höher liegen als der Impuls bei $\frac{t}{\tau} = 0,56$.

t / ms	$\frac{t}{\tau}$	Signalthöhe / mV	Messmethode
0	0	254 ± 2	PC
2	0.111732	115 ± 2	PC
4	0.223464	200 ± 10	Oszi.
6	0.335196	230 ± 10	Oszi.
8	0.446927	250 ± 10	Oszi.
10	0.558659	275 ± 10	Oszi.

Tabelle 1: Messwerte zur Aufgabe 2. Der Impulsabstand t wurde mit dem Oszillographen gemessen. Die Signalthöhen bei $t = 0$ ms und $t = 2$ ms wurden mit dem PC im Messmodus W aufgezeichnet. Aus den Daten wurde der Mittelwert gebildet und mit der *Mathematica*-Funktion `NonlinearRegress` wurde der Fehler bestimmt. Aufgrund der begrenzten Verstellbarkeit der Phase des Sample and Hold-Verstärkers konnte die Signalthöhe für die letzten vier Impulsabstände nur mit dem Oszillographen bestimmt werden.

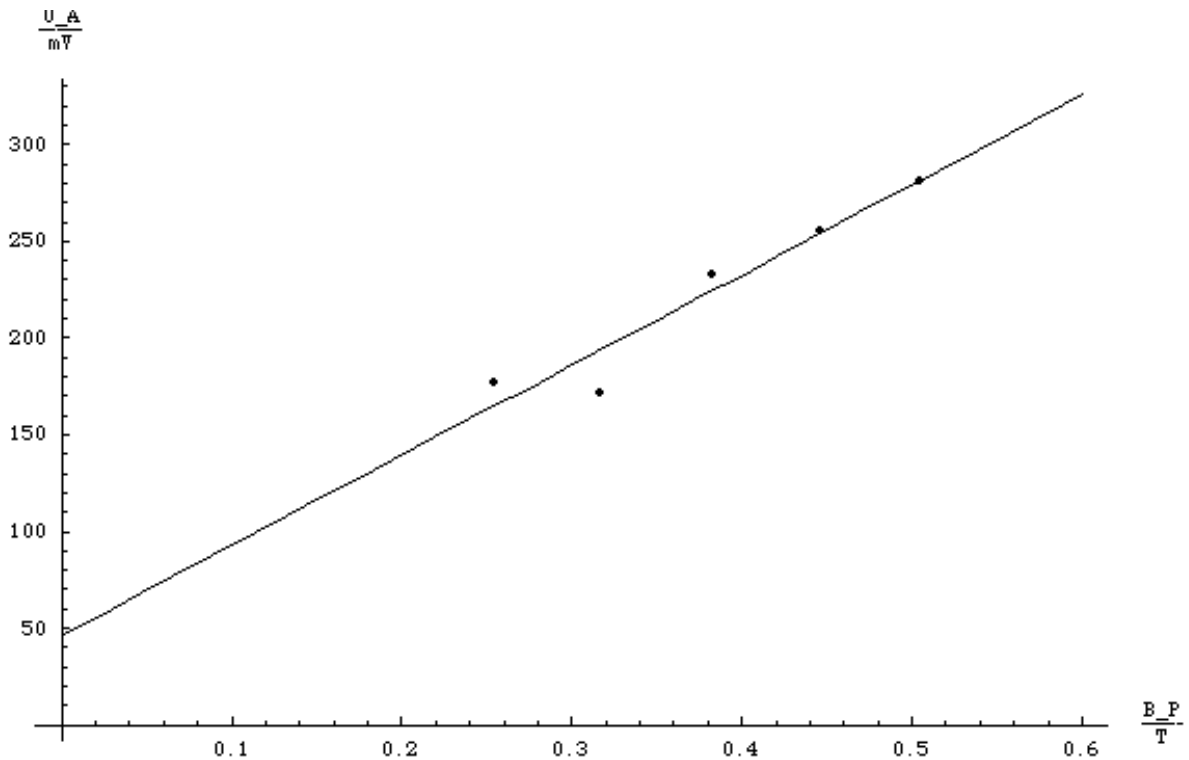


Abbildung 4: Signalthöhe im Analysator U_A gegen magnetische Induktion des Polarisiermagneten B_P . Eingezeichnet ist der *Mathematica*-Fit an eine Gerade mit Achsenabschnitt. Der Achsenabschnitt bei $B_P = 0$ gibt das Untergrundsignal an. Die Regressionsgerade lautet: $\frac{U_P}{\text{mV}} = 46.7386 + 465.296 \frac{B_P}{\text{T}}$.

3.2. Aufgabe 4: Linearität von Signalthöhe und Magnetfeld

In diesem Versuchsteil prüfen wir den linearen Zusammenhang von Signalthöhe U_A im Analysator und magnetischer Induktion B_P im Polarisiermagneten. Die Daten entnehme man Tabelle 2, einen *Mathematica*-Plot der Daten findet man in Abbildung 4.

Die Resonanzfrequenz des Analysators bestimmen wir mit dem Frequenzzähler zu (4.722412 ± 0.000001) MHz. Der Fehler in der Frequenzbestimmung ist gegen den Fehler von γ (siehe A) vernachlässigbar. Dem entspricht nach Gleichung (7) eine Kraftflussdichte von $B = (0.1109101 \pm 0.0000017)$ T. $\Delta E = h\nu = 1.95 \cdot 10^{-8}$ eV.

3.3. Aufgabe 5: Spindrehung

Im Erdmagnetfeld der Stärke $B_{Erde} \approx 3 \cdot 10^{-5}$ T liegt die Resonanzfrequenz der Protonen bei etwa 1280 Hz (vgl. Gleichung (7)).

Der Drehwinkel Φ ist proportional zu B_1 mit B_1 : durch HF-Spule erzeugtes Magnetfeld. In diesem Versuchsteil variieren wir mit einem Dreiecksgenerator die Amplitude des Feldes B_1 und beobachten die Drehwinkel der Spins. Wir messen mit dem PC die Signalthöhe im Ana-

3. Versuchsdurchführung

I_P/A	U_H/mV	B_P/T	U_A/mV
1.611	4.10 ± 0.01	0.5043 ± 0.001	281.2 ± 1.5
1.414	3.62 ± 0.01	0.4453 ± 0.001	255.9 ± 1.7
1.202	3.11 ± 0.01	0.3825 ± 0.001	232.9 ± 2.3
0.993	2.57 ± 0.01	0.3161 ± 0.001	171.7 ± 2.7
0.797	2.06 ± 0.01	0.2534 ± 0.001	176.8 ± 3.0

Tabelle 2: Messwerte zur Aufgabe 4: Strom im Polarisiermagneten I_P , Spannung der Hall-Sonde, mit der das Magnetfeld im Polarisiermagneten vermessen wurde U_H . Daraus berechnete magnetische Induktion $B_P = U_H \cdot 0.123 \frac{\text{T}}{\text{mV}}$, Signalhöhe am Analysiermagneten U_A . Die Fehler in U_A wurden wie in der Beschreibung zu Tabelle 1 berechnet. Die Abweichungen von der Gerade sind größer als der so berechnete Fehler. Der größte Beitrag des Fehlers liegt vermutlich in der ungenauen Einstellung des Sample and Hold-Verstärkers auf das Minimum des Resonanzpeaks. Die Fehler in U_H wurden durch die Ablesungenauigkeit bestimmt, der Fehler in B_H ergibt sich aus dem Umrechnungsfaktor.

lysator gegen die Zeit. Die Zeit-Achse kann anhand der gemessenen Start- und Endamplitude und der eingestellten Wobbel-Zeit auf die Wechselfeld-Amplitude U_{\sim} umgerechnet werden. Für die Spindrehung wird allerdings kein linear polarisiertes, sondern ein zirkular polarisiertes Wechselfeld benötigt. Da man jede linear polarisierte Schwingung in zwei gegenläufige zirkular polarisierte Schwingungen mit halber Amplitude zerlegen kann, gilt: $U_1 = \frac{1}{2}U_{\sim}$. Die mit dem Oszillographen gemessenen Amplituden sind „peak-to-peak“-Spannungen, müssen also nochmals halbiert werden. Dadurch, dass Manipulator und Analysator durch ein (1.50 ± 0.01) m langes Schlauchstück (Angabe vom Betreuer) verbunden sind und durch den Zeitversatz (schätzungsweise (0.50 ± 0.25) s) beim Starten der Modulation des Dreiecksgenerators relativ zum Start der PC-Messung entsteht insgesamt eine Rechtsverschiebung des aufgezeichneten Signalverlaufs Abbildung 5 von 2.28 s. Diese Korrekturen wurden in Tabelle 3 bereits vorgenommen.

Das Oszillographen-Signal ist nicht proportional zur Besetzungsdifferenz Δn (siehe [1]) und muss daher für eine quantitative Auswertung nach folgender Formel korrigiert werden.

$$S = k \left(1 - \sqrt{1 + l\Delta n} \right) \quad (13)$$

Die Parameter k und l wurden per Hand zu $k = 2 \cdot 10^{-12}$ und $l = 0.45 \cdot 10^{22}$ gefunden. Leider ist das Ergebnis für die quantitative Auswertung nicht verwendbar, da die Peaks auch mit diesen am besten passenden Werten nicht zu einer gleichmäßig um die Nulllinie schwankenden Kurve geformt werden konnten, siehe Abbildung 7.

3.4. Aufgabe 6: Bestimmung der Resonanzbreiten zu verschiedenen Drehwinkeln

Jetzt soll die Resonanzbreite zu verschiedenen Drehwinkeln untersucht werden. Dafür wurde die Amplitude der HF-Spule fest eingestellt und die Frequenz variiert. Die aus den Abbildungen 8,

3. Versuchsdurchführung

Φ	t/s	t'/s	$U_{1,exp}/mV$	$U_{1,theo}/mV$
$\pi/2$	2.8 ± 3.9	0.5 ± 3.9	4.0 ± 3.7	3.0
π	7.0 ± 3.9	4.7 ± 3.9	8.0 ± 3.7	5.9
2π	15.0 ± 3.9	12.7 ± 3.9	15.7 ± 3.7	11.8
3π	21.6 ± 3.9	19.3 ± 3.9	22.1 ± 3.7	17.7
4π	28.6 ± 3.9	26.3 ± 3.9	28.8 ± 3.7	23.6
5π	36.6 ± 3.9	34.3 ± 3.9	36.5 ± 3.7	29.5
6π	44.5 ± 3.9	42.2 ± 3.9	44.1 ± 3.7	35.4

Tabelle 3: Messwerte zur Aufgabe 5: Φ : Drehwinkel der Spins, t : ungeeichte Zeit (aus Anlage 1), t' : geeichte Zeit (siehe Text), $U_{1,exp}$: Spannung zur Zeit t' , $U_{1,theo}$: Für den Drehwinkel Φ theoretisch benötigte Spannung nach $U_{1,theo} = 2 \frac{\Phi R v}{\gamma \mu_0 n}$ mit $R = 47\Omega$: Widerstand der HF-Spule, $v = 0.84 \frac{m}{s}$: Fließgeschwindigkeit des Wassers, $n = 125$: Anzahl der Windungen der HF-Spule. Auch $U_{1,theo}$ ist fehlerbehaftet. Die Größe des Fehlers ergibt sich aus dem Fehler der Bestimmung von v (siehe dazu 3.8). Der theoretische Wert liegt stets unter dem beobachteten Wert (teilweise gar außerhalb der Fehlergrenzen).

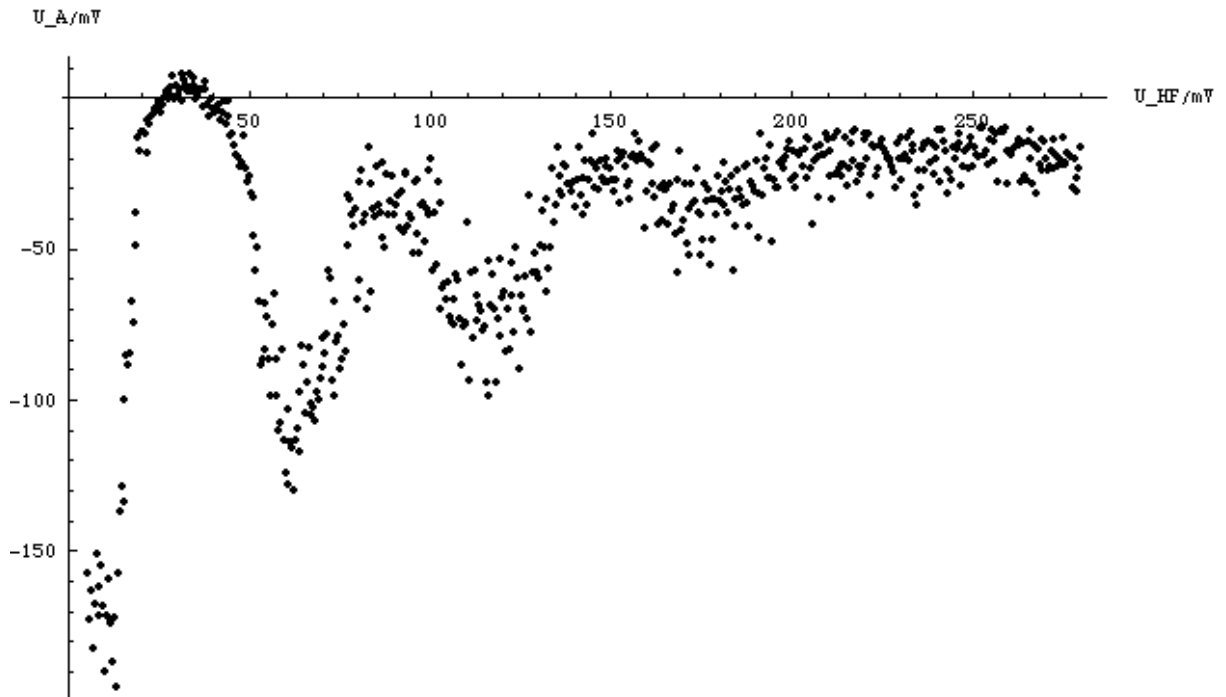


Abbildung 5: Messung der Spindrehung. Signalhöhe im Analysator U_A gegen Amplitude der Hochfrequenzspannung U_{HF} .

3. Versuchsdurchführung

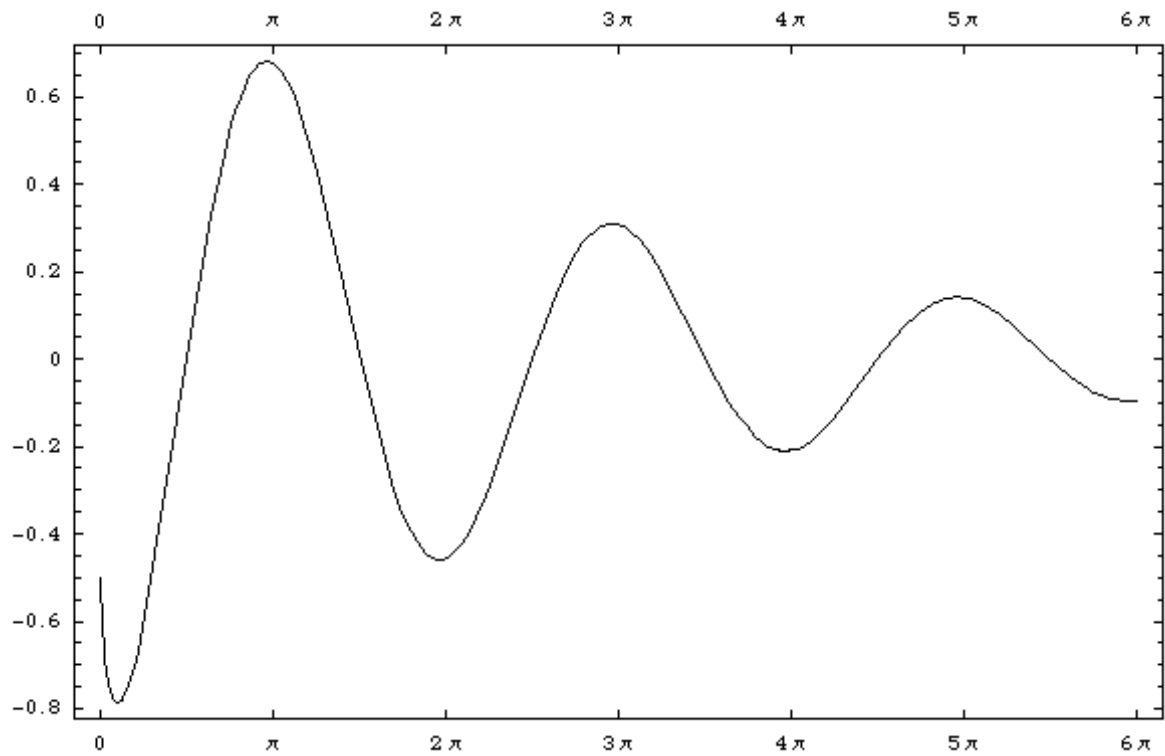


Abbildung 6: Theoretischer Verlauf der Spindrehung nach Gleichung (12) mit $u = 0$. Ordinate: Relative Magnetisierung $\frac{M_z(\Phi)}{M_0}$, Abszisse: Spin-Drehwinkel Φ .

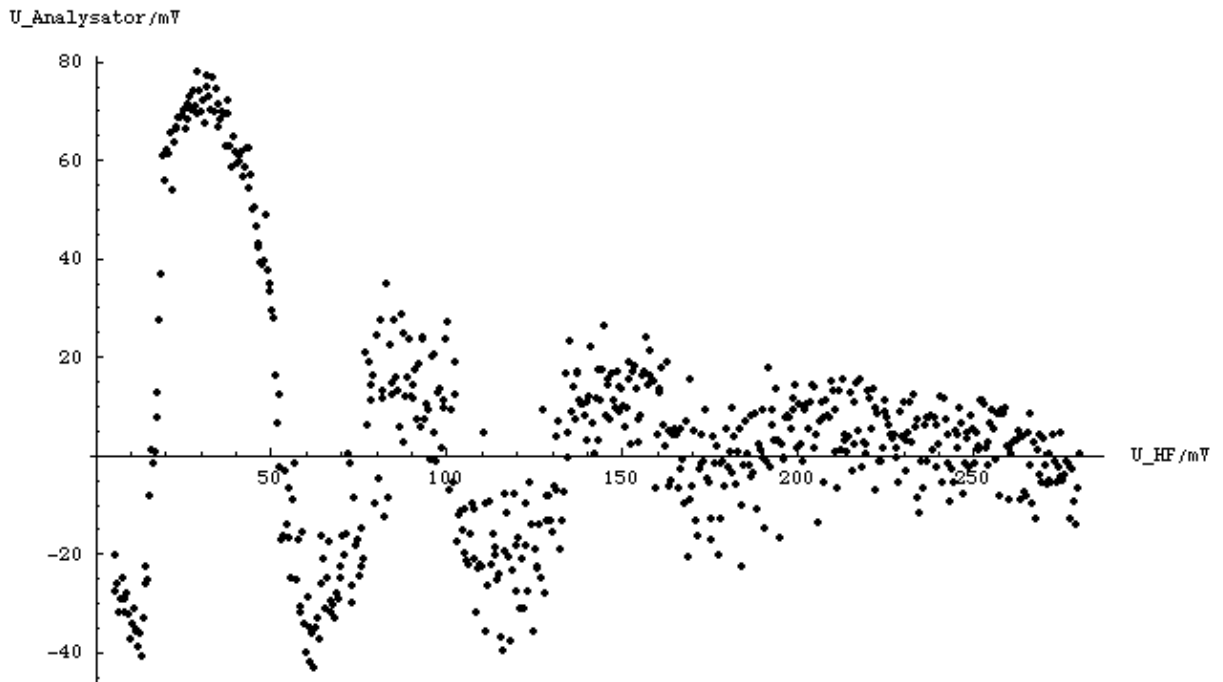


Abbildung 7: Gemessener Verlauf der Spindrehung mit folgenden Korrekturen: Korrektur auf Nulllinie. $S_0 = -20$, Korrektur auf Nichtlinearität des Oszillographen-Signals nach Gleichng (13)

3. Versuchsdurchführung

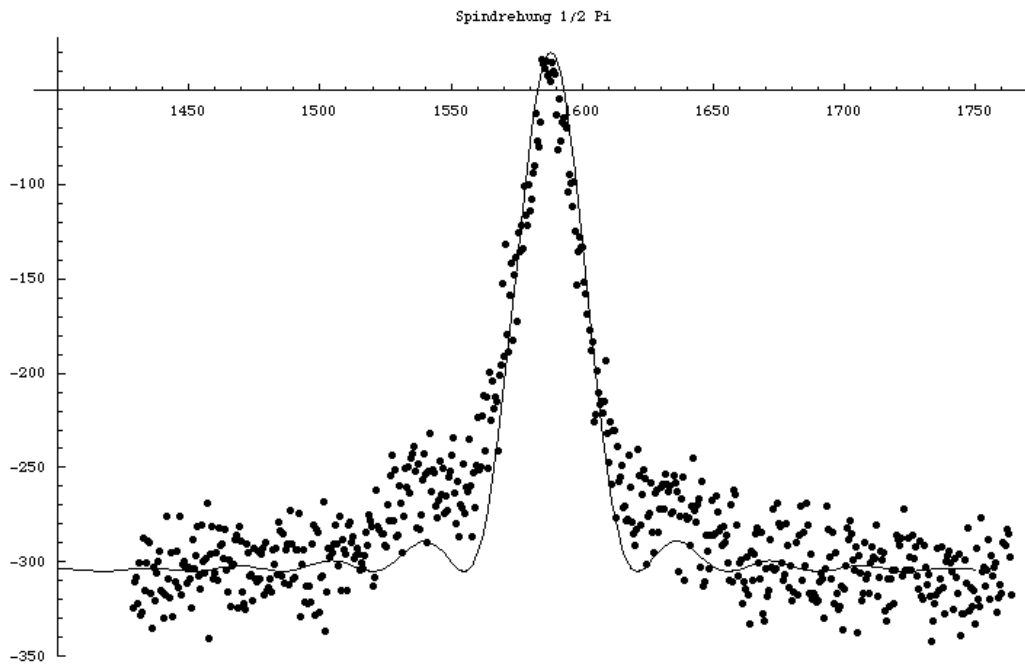


Abbildung 8: Resonanzkurve für Spindrehwinkel $\Phi = \frac{1}{2}\pi$ mit theoretisch erwarteter Kurve.

Φ	HWB_{theo} / Hz	HWB_{exp} / Hz
$\frac{\pi}{2}$	31	32
π	26	49
2π	91	116

Tabelle 4: Messwerte zur Aufgabe 6: Resonanzbreiten. Φ : Spin-Drehwinkel, HWB_{theo} : theoretisch nach Gl. (12) erwartete Halbwertsbreite (HWB), HWB_{exp} : beobachtete HWB.

9, 10 abgelesenen Resonanzbreiten (siehe Anlagen 14 – 16) sind in Tabelle 4 zusammengestellt.

3.5. Aufgabe 8: Messung von Betrag und Winkel des Störfeldes

Dem am Manipulator durch die Helmholtz-Spulen erzeugten sehr homogenen Magnetfeld \vec{B}_H ist ein Störfeld \vec{B}_s überlagert, das großteils durch das Erdmagnetfeld ($B_{Erde} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$) bestimmt ist, aber auch durch Streufelder der anderen Magneten. Daraus resultiert ein effektives Magnetfeld \vec{B}_{eff} .

$$|\vec{B}_{eff}| = |\vec{B}_H + \vec{B}_s| \quad (14)$$

Zur Bestimmung des Störfeldes werden die Helmholtz-Spulen mit Strömen von -100 mA bis +100 mA betrieben.

Die Größe des Störfeldes \vec{B}_s und seinen Winkel zu \vec{B}_H erhält man mithilfe des Cosinus-Satzes aus folgenden Beziehungen (siehe dazu Abb. 11).

3. Versuchsdurchführung

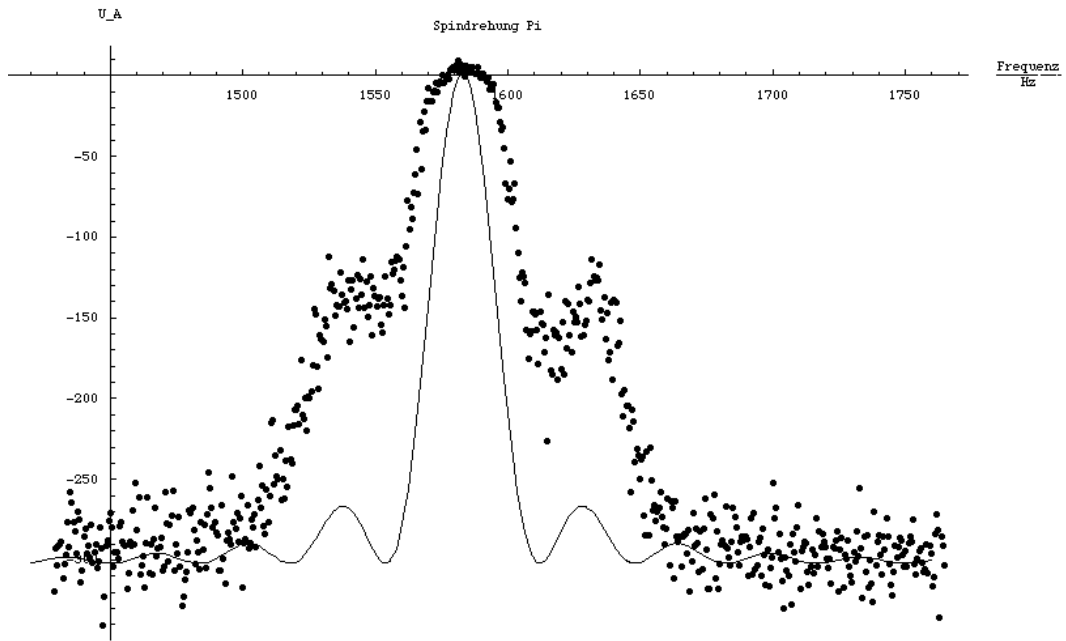


Abbildung 9: Resonanzkurve für Spindrehwinkel $\Phi = \pi$ mit theoretisch erwarteter Kurve.

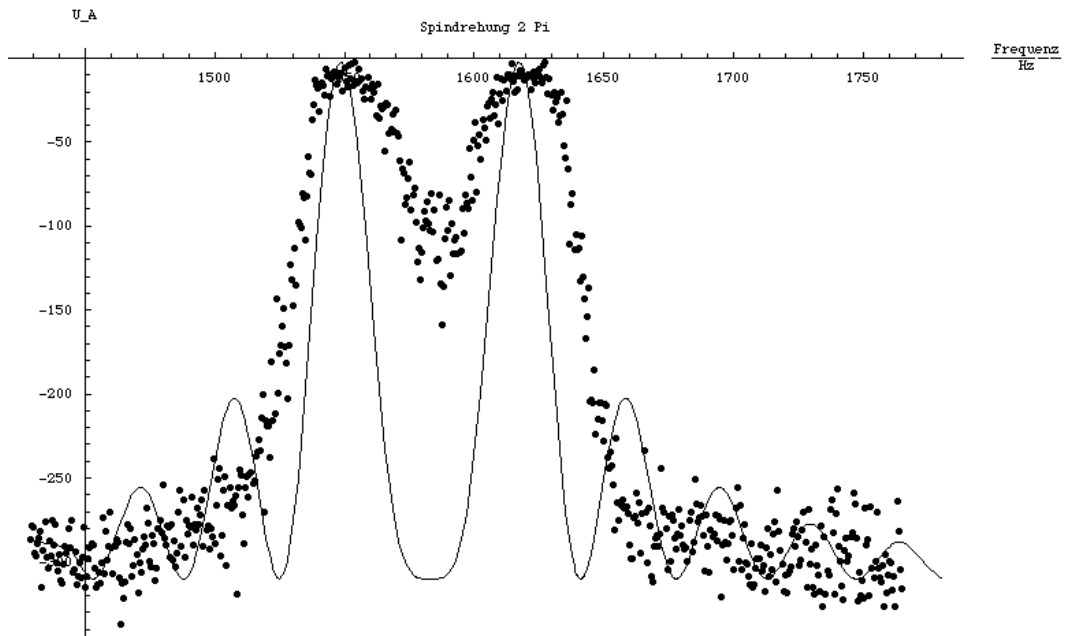


Abbildung 10: Resonanzkurve für Spindrehwinkel $\Phi = 2\pi$ mit theoretisch erwarteter Kurve.

3. Versuchsdurchführung

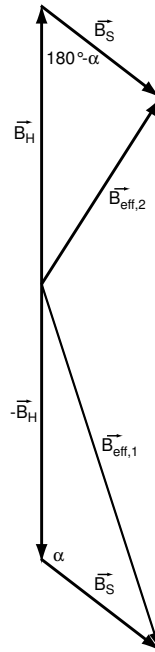


Abbildung 11: Geometrie zur Aufgabe 8

$$B_{eff,1}^2 = B_s^2 + B_H^2 - 2B_s B_H \cos \alpha \quad (15)$$

$$B_{eff,2}^2 = B_s^2 + B_H^2 + 2B_s B_H \cos \alpha \quad (16)$$

$$(17)$$

Mit Gleichung (7) ergibt sich bei Addition von (15) und (16)

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 (2B_s^2 + 2k^2 I_H^2) \quad (18)$$

k ist die Proportionalitätskonstante zwischen B_H und I_H , die man aus Gleichung (4) der Anleitung [1] erhält. Es gilt: $B_H = kI_H$.

Bei Subtraktion von (15) und (16) ergibt sich

$$\nu_1^2 - \nu_2^2 = -4 \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 (B_s k \cos(\alpha) I_H) \quad (19)$$

Aus der Auftragung von $\nu_1^2 + \nu_2^2$ gegen I_H^2 lässt sich also der Betrag von \vec{B}_s , aus der Auftragung von $\nu_1^2 - \nu_2^2$ gegen I_H der Winkel α zwischen \vec{B}_H und \vec{B}_s bestimmen.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Die Fehler ergeben sich aus der Messungengenauigkeit des Radius der Helmholtz-Spulen zu $R = (0.230 \pm 0.002)$ m – dieser Fehler fließt in die Proportionalitätskonstante k ein – und der Halbwertsbreite der Resonanzfrequenzen (siehe Graphen 2 – 5 in der Anlage). Den Fehler in B_s und α bestimmen wir aus den Graphen mit größter und kleinster Steigung, die wir aus den obigen Fehlerüberlegungen erhalten.

3. Versuchsdurchführung

I_H/mA	f/Hz
-99.77	12793 ± 29
-49.75	6030 ± 30
+49.48	7698 ± 30
+99.28	14438 ± 27

Tabelle 5: Messwerte zur Aufgabe 8: Resonanzfrequenzen f für verschiedenen Stromstärken im Helmholtz-Spulenpaar I_H .

Zur Frequenzmessung: Um den Fehler durch die Laufzeit der Spins zwischen Spindrehung im Manipulator und Ankunft im Analysator zu korrigieren, modulieren wir die Stärke des Magnetfeldes der HF-Spule einmal von kleinen Frequenzen kommend (UP-Richtung) und anschließend umgekehrt (DOWN-Richtung). Aus dem Mittelwert der beiden Messungen und der Halbwertsbreite wird die Resonanzfrequenz mit Fehler bestimmt, Wir verwenden leider den falschen Messmodus zur Aufzeichnung der Resonanzfrequenz: Es wird nur die Analysatorspannung gegen die Zeit aufgetragen. Die Um-Eichung auf Frequenzen erfolgt folgendermaßen: Wir kennen den vom Dreiecksgenerator durchmodulierten Frequenzbereich und die Aufnahmedauer des PCs und können so die Zeiten in Frequenzen umrechnen. Er liegt in der Größenordnung von 30 Hz und entspricht einer Modulationszeit von etwa 8 Sekunden. Dazu kommt ein Fehler durch das zeitversetzte Starten von PC-Messung und Dreiecksgenerator-Modulation. Diesen Fehler schätzen wir auf eine halbe Sekunde. Der Fehler für Messung in UP-Richtung kann den Fehler für Messung in DOWN-Richtung zumindest teilweise kompensieren. Er ist daher gegen den Fehler, den wir aus der Halbwertsbreite bestimmen, vernachlässigbar.

Für das Störfeldes erhalten wir $B_s = (3.44 + 0.59/ - 0.71) \cdot 10^{-5}\text{T}$, für den Winkel zwischen Störfeld B_s und Feld des Helmholtz-Spulenpaares B_H erhalten wir $\alpha = (130.1 + 1.0/ - 0.9)^\circ$.

3.6. Aufgabe 9: Bloch-Siegert-Theorie

Die Bloch-Siegert-Theorie besagt, dass die Resonanzfrequenz von der Amplitude des Hochfrequenzfeldes abhängt, da sich die magnetischen Feldstärken von Helmholtz-Feld und HF-Feld vektoriell addieren. Es gilt in der Näherung für $|B_\sim| \ll B_0$:

$$\omega = \gamma \left(B_0 + \frac{B_\sim^2}{4B_0} \right) \quad (20)$$

Aus dem Graphen in Anhang 6 bestimmen wir die Resonanzfrequenz bei 500 mV HF-Amplitude zu (7676 ± 16) Hz bei 49.48 mA Spulenstrom. Verglichen mit dem Wert aus Tabelle 5 bei demselben Spulenstrom, aber einer HF-Amplitude von 50 mV von (7698 ± 30) Hz ist innerhalb der Fehlergrenzen keine Veränderung feststellbar.

Nach (20) müsste die Resonanzfrequenz bei 500 mV HF-Amplitude allerdings bei 7928 Hz liegen.

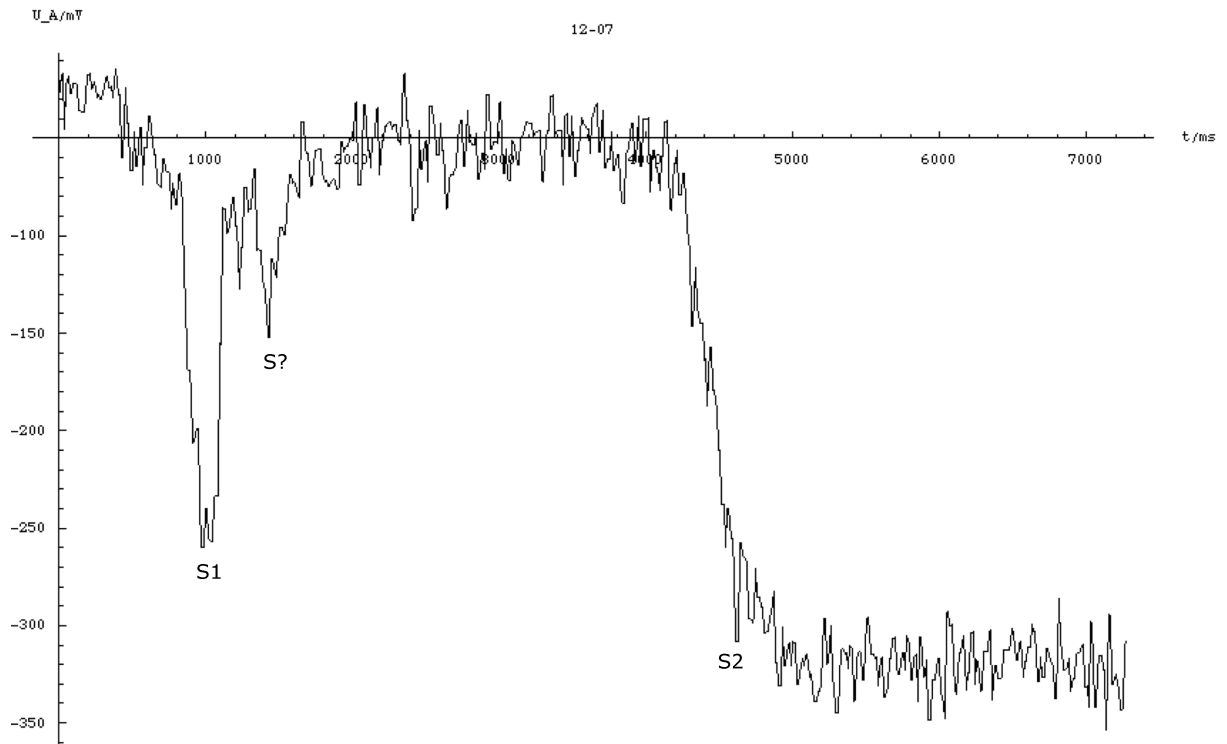


Abbildung 12: Analysatorsignal U_A beim Einschalten mit Geschwindigkeits-Stufe 13.5. S1 kommt von den Spins, die im Analysatormagneten polarisiert wurden. Die Herkunft von S? konnte nicht geklärt werden. S2 stammt von den im Polarisiermagneten ausgerichteten Spins. Aus der Laufzeit und der Signalhöhe von S2 kann die Relaxationszeit τ bestimmt werden (siehe Text).

3.7. Aufgabe 11: Stellung des Spindetektors relativ zum Polarisiermagneten

Bei Verdrehen des Spindetektors relativ zum Polarisator ändern sich Amplitude und Phase des Sample and Hold-Signals. Vermutlich werden diese Änderungen durch die unterschiedliche Orientierung des im Vergleich zum Polarisatormagneten viel schwächeren Erdmagnetfelds $\frac{B_{Erde}}{B_{Spindetektor}} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ hervorgerufen.

3.8. Aufgabe 12: Bestimmung der Relaxationszeit und Fließgeschwindigkeit

In diesem Versuchsteil bestimmen wir die Relaxationszeit der Spins und die Fließgeschwindigkeit des Wassers. Die anfängliche Magnetisierung des Wassers M_0 relaxiert auf dem Weg vom Polarisator zum Analysator.

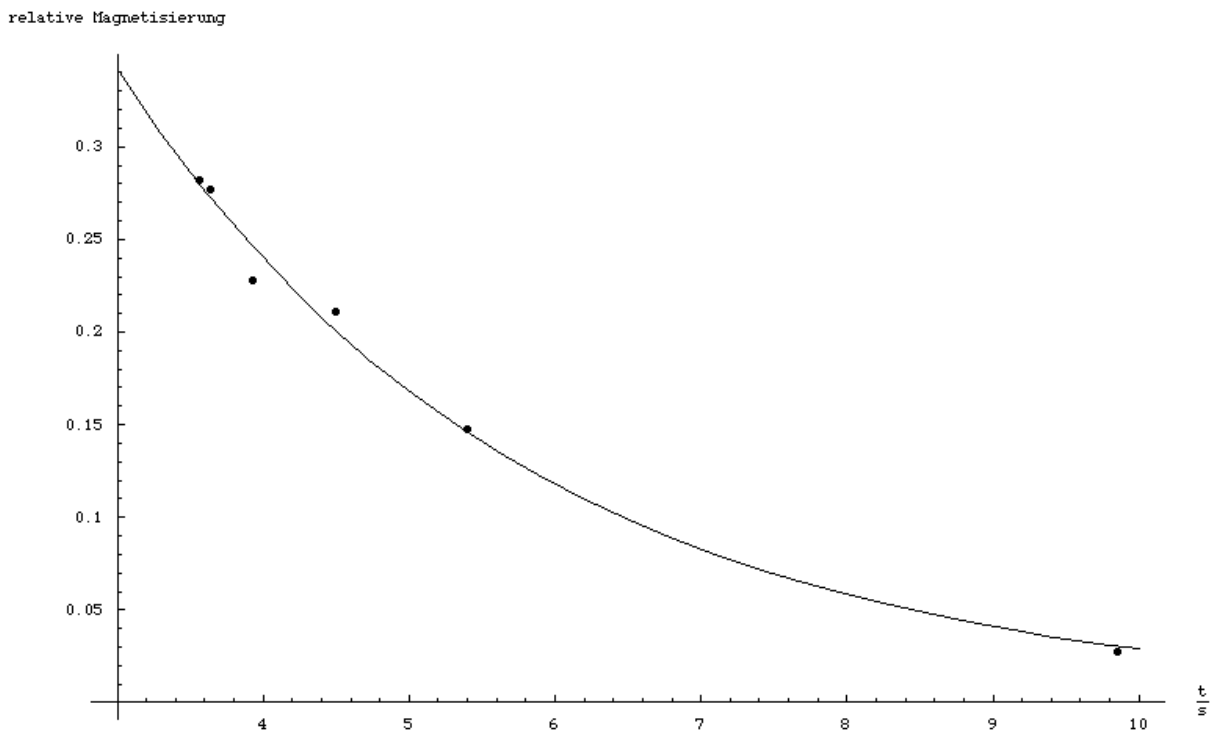


Abbildung 13: Bestimmung der Relaxationszeit der Spins τ aus einem *Mathematica*-Fit an Gleichung (21).

3. Versuchsdurchführung

Geschwindigkeits-Stufe der Wasserpumpe	Laufzeit S2 t/ms	Signalhöhe am Analysator U_H / mV
15.5	3270 ± 20	282 ± 1
13.5	3640 ± 20	277 ± 1
12	3930 ± 20	228 ± 1
10.5	4500 ± 50	211 ± 1
9	5400 ± 50	147 ± 1
6	9850 ± 100	27 ± 1

Tabelle 6: Messwerte zur Aufgabe 12. Die Fehler sind Ablesefehler aus den Graphen 8 – 13 im Anhang. Nicht berücksichtigt ist ein möglicherweise großer systematischer Fehler von -16% in der Zeitmessung durch die Wahl der rechten unteren Kante der Flanke des Signals S2 für die Auswertung.

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (21)$$

Im Analysator wird die Signalstärke $U_A \propto M(t)$ gemessen. **Aus einem *Mathematica*-Fit der aus den Graphen 8 – 13 (siehe Anlage) ermittelten Laufzeiten und Signalstärken an Gleichung (21) wird die Relaxationszeit zu $\tau = (2.83 \pm 0.26)$ s bestimmt.** Fehler aus *Mathematica*-Fit.

Aus der Laufzeit des Signals S2 und der Länge des Schlauchs berechnen wir die Fließgeschwindigkeiten bei Geschwindigkeits-Stufe 15.5 zu $v = 0.84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zum Fehler in v siehe Beschreibung zu Tabelle 6.

A. Konstanten

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$\mu_N = \frac{e}{2m_P} \hbar = 3.173 \cdot 10^{-26} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

$$m_P = 1.67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\gamma = (2.67530 \pm 0.00004) \cdot 10^8 \frac{1}{\text{sT}}$$

Literatur

- [1] E. Batke. Anleitung zum Fortgeschrittenenpraktikum. *Physikalisches Institut der Universität Würzburg*, 2004.
- [2] A. Hammer; H. Hammer; K. Hammer. *Physikalische Formeln und Tabellen*. J. Lindauer Verlag (Schaefer), München, 1994.
- [3] H. Müller. *Magnetische Kernresonanz*. Zulassungsarbeit zur wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt an Gymnasien, Physikalische Fakultät der Universität Würzburg, 1980.