

Fortgeschrittenenpraktikum SS 2004

Laser

Leonard Burtscher, Johannes Pernpeintner

2. April 2004

Physikalisches Institut der Universität Würzburg
Betreuer: Prof. Dr. P. Jakob

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Theorie	4
2.1. Laser-Grundlagen	4
2.1.1. Prinzip	4
2.1.2. Laser-Bedingung	5
2.2. Modentypen	5
2.2.1. Longitudinale Moden	5
2.2.2. Transversale Moden	5
2.3. Modenkopplung	6
2.4. Gauß-Strahlen	6
2.5. Optik	7
2.5.1. Reflektivität eines dünnen Plättchens	7
2.5.2. Brewster-Winkel	8
3. Versuchsaufbau	8
4. Versuchsdurchführung und Auswertung	9
4.1. Justieren des Lasers	9
4.2. Strahldurchmesser im Laserresonator	9
4.3. Darstellung verschiedener Moden	11
4.4. Abschätzung des Verstärkungsfaktors	13
4.4.1. Brechungsindex des Glasplättchens	14
4.4.2. Dicke des Glasplättchens	15
4.4.3. Verlust-Gewinn-Bilanz des Lasers	16
4.5. Anzahl der zum Laser-Betrieb beitragender Moden	18
4.6. Beobachtung von Lasermoden	18
4.7. Messung der Lichtgeschwindigkeit	20
A. Bildnachweis	22

1. Einleitung

Laser, das ist „**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation“, zu deutsch etwa „Lichtverstärkung durch stimulierte Emission“.

Mithilfe eines Lasers erhält man kohärentes, fast divergenzfreies und damit sehr intensives Licht fast jeder gewünschten Wellenlänge. Laser spielen heute in vielen Bereichen eine wichtige Rolle, beispielsweise in der Industrie als Schweißlaser, in der Medizin für präzise chirurgische Operationen und ganz besonders in der Forschung als intensive Punktlichtquelle für (räumlich und zeitlich) hochauflösende Spektroskopie.

In diesem Versuch sollen einige Experimente zur Untersuchung der Eigenschaften eines Lasers durchgeführt werden. Mit einer Linse wird der Strahl aufgeweitet, um mit einem verschiebbaren Draht verschiedene Transversalmoden sichtbar zu machen. Außerdem wird so mit einer Photodiode das Gaußsche Strahlprofil des Lasers ausgemessen.

Ein verdrehbares Glasplättchen dient, neben der Messung der Dicke und Brechzahl des Plättchens selbst, zu einer Abschätzung des Verstärkungsfaktors des Lasers. Daraus kann die Anzahl der anschwingenden Longitudinalmoden bestimmt werden.

Zum Schluss wird mit Hilfe eines genau bekannten Verschiebestücks die Lichtgeschwindigkeit aus dem Modenabstand bestimmt.

2. Theorie

2.1. Laser-Grundlagen

2.1.1. Prinzip

In einem Zweiniveau-System, das zwar nicht für den Betrieb eines Lasers verwendet werden kann, zur Erklärung aber gut geeignet ist, gibt es drei grundlegende Übergangsarten zwischen den beiden Energieniveaus: Spontane und induzierte Emission und Absorption. Die beiden Energieniveaus werden mit E_1, E_2 bezeichnet, wobei gilt $E_2 > E_1$. Die Elektronendichten in diesen Niveaus heißen n_1, n_2 . Die Übergänge werden quantitativ durch Ratengleichungen beschrieben [?]. Kombiniert man diese Gleichungen erhält man eine Beziehung für die Änderung der Photonendichte n_q in Abhängigkeit der Besetzungszahldifferenz $\Delta n = n_2 - n_1$:

$$\frac{dn_q}{dt} = \sigma c n_q \Delta n - \beta n_q \quad (1)$$

Darin ist σ der Einstein-Koeffizient für induzierte Emission und Absorption. β ist der Photonenverlustfaktor. Soll die Photonendichte gesteigert werden, muss $\Delta n > 0$ gelten, da alle anderen Größen positiv sind. Man spricht dann von Besetzungsinversion.

Ein Laser besteht nun im Wesentlichen aus einem verstärkenden Medium, in dem durch eine Energiepumpe (z.B. Gasentladungen beim He-Ne-Laser) Besetzungsinversion hergestellt wird. Licht, das dieses Medium durchquert, wird aufgrund induzierter Emission verstärkt. Um die Länge des verstärkenden Mediums zu begrenzen, wird die Anordnung zwischen zwei sehr gut reflektierende Spiegel gebracht. Dadurch wiederholt sich die Verstärkung durch das Medium. Siehe dazu Abbildung 1.

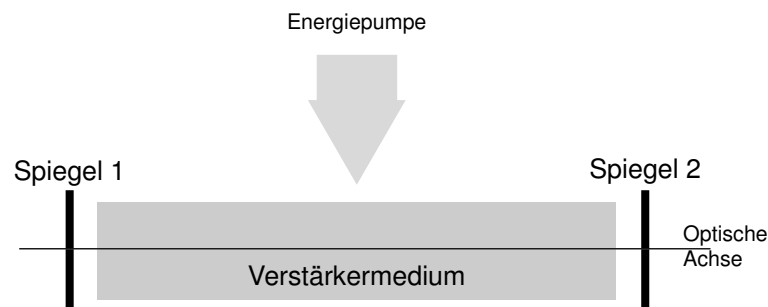


Abbildung 1: Prinzip eines Lasers. Durch die „Energiepumpe“ werden die Atome des Verstärkermediums angeregt. Durch spontane Emission wird Licht ausgesandt. Die (konfokalen) Spiegel reflektieren das Licht auf die optische Achse, wo es bei jedem Durchlauf durch das Verstärkermedium aufgrund induzierter Emission an Intensität gewinnt. Spiegel 1 sollte möglichst das gesamte auftreffende Licht reflektieren, Spiegel 2 ist teildurchlässig, denn dort wird das Laserlicht ausgekoppelt.

2.1.2. Laser-Bedingung

Die Intensität im Resonator ist nach [?] durch

$$I(z, \nu) = I_0 e^{-\alpha z} \quad (2)$$

gegeben. Darin ist α der Absorptionskoeffizient, der bei Verstärkung negativ wird, z ist die Koordinate in Richtung der optischen Achse.

Der Gewinn pro Umlauf¹ ist definiert als:

$$G(\nu) = \frac{I}{I_0} = e^{-\alpha(\nu)2l-\gamma} \quad (3)$$

Ohne Berücksichtigung von Verlusten ergibt sich für einen Durchgang:

$$G'(\nu) = e^{-\alpha(\nu)l_{Verstärk}} \quad (4)$$

Darin ist $l_{Verstärk}$ die durchstrahlte Länge des Verstärkermediums.

Der für die Verstärkung verwendete Übergang der Helium-Neon-Röhre ist dopplerverbreitert. Dadurch ergibt sich ein Dopplerprofil in der Verstärkung der verschiedenen Frequenzen.

$$G(\nu) = g_0 e^{-4 \ln(2) \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D} \right)^2} \quad (5)$$

Darin ist $\Delta \nu_D$ die Dopplerbreite des optischen Übergangs, die etwa 1.5 GHz beträgt.

2.2. Modentypen

2.2.1. Longitudinale Moden

Zwischen den Spiegeln 1 und 2 bildet sich eine stehende Welle, das heißt auf den Spiegeloberflächen verschwindet die Amplitude der elektromagnetischen Welle. Aufgrund dieser Randbedingungen sind für die Welle nur diskrete Schwingungsfrequenzen erlaubt.

Ihr Abstand $\Delta \nu$ ist

$$\Delta \nu = \frac{c}{2l_{Res}} \quad (6)$$

Darin ist l_{Res} die Resonatorlänge.

2.2.2. Transversale Moden

Je nach Geometrie der Spiegel entstehen unterschiedliche transversale Moden. Für die Intensität $I_n(x)$ und die Feldamplitude $u_n(x)$ einer transversalen Mode n in Abhängigkeit vom Abstand von der optischen Achse x gilt näherungsweise

¹Ein Umlauf entspricht zwei Durchgängen durch das Laser-Medium.

$$I_n(x) \propto |u_n(x)|^2 \propto \left| H_n(x') e^{-\frac{x'^2}{2}} \right|^2, \quad (7)$$

wobei die H_n die Hermiteschen Polynome sind. Für die spätere Auswertung seien die H_0 , H_1 und H_2 schon an dieser Stelle angegeben.

$$H_0 = 1 \quad (8)$$

$$H_1 = 2x' \quad (9)$$

$$H_2 = 4x'^2 - 2 \quad (10)$$

x' ist eine Abkürzung für

$$x' = \sqrt{2} \frac{x}{w(z)}. \quad (11)$$

Darin wiederum ist $w(z)$ der Bündelquerschnitt. Gleichung (7) gilt natürlich auch für die y -Richtung. Für die gesamte x - y -Ebene gilt somit

$$I_{n,m}(x, y) \propto \left| H_n(x') H_m(y') e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{2}} \right|^2. \quad (12)$$

Photographien der TEM₁₀- und TEM₂₀-Moden sind in den Abbildungen 5 und 6 zu sehen.

2.3. Modenkopplung

Die Lichtverstärkung durch induzierte Emission ist abhängig von der Besetzungsinversion. Bei einer stehenden Welle gibt es eine räumliche Variation der Intensität der elektromagnetischen Welle, was dazu führt, dass die Verstärkung von der Position im Verstärkermedium abhängt. In Bereichen großer Amplitude wird der angeregte Zustand entvölkert und die Lichtverstärkung nimmt ab. Diesen Effekt nennt man räumliches Lochbrennen.

Aufgrund des räumlichen Lochbrennens schwingen die longitudinalen Moden nicht unabhängig voneinander. Ihre Phasen sind gekoppelt, die Intensität des Lasers wird mit der Differenz der Frequenzen der beiden longitudinalen Moden moduliert.

2.4. Gauß-Strahlen

Die Grundmode eines Laser-Resonators ist die TEM₀₀-Mode. Das Profil der Feldamplitude dieser Mode ergibt nach Gleichung (7) und (8) eine Gauß-Kurve. Deswegen wird ein Lichtstrahl mit einer solchen Intensitätsverteilung Gauß-Strahl genannt. Aus dem Huygensschen Prinzip lässt sich ableiten, dass für diesen Strahl die Form der Intensitätsverteilung auch bei Fortschreiten der Welle in z -Richtung erhalten bleibt. Allerdings ändert sich der Bündelquerschnitt $w(z)$ und die Krümmung des Strahls $R(z)$ nach den Beziehungen

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \quad (13)$$

und

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right). \quad (14)$$

w_0 ist der Bündelquerschnitt an der engsten Stelle, der Strahltaile. An der Strahltaile ist auch der Ursprung der z -Achse $w(0) = w_0$.

2.5. Optik

2.5.1. Reflektivität eines dünnen Plättchens

In einem planparallelen dünnen Plättchen wird ein eintretender Lichtstrahl mehrfach reflektiert, wie es in Abb. 2 dargestellt ist. Dies führt zu einer Interferenz-Erscheinung, der so genannten Vielstrahlinterferenz.

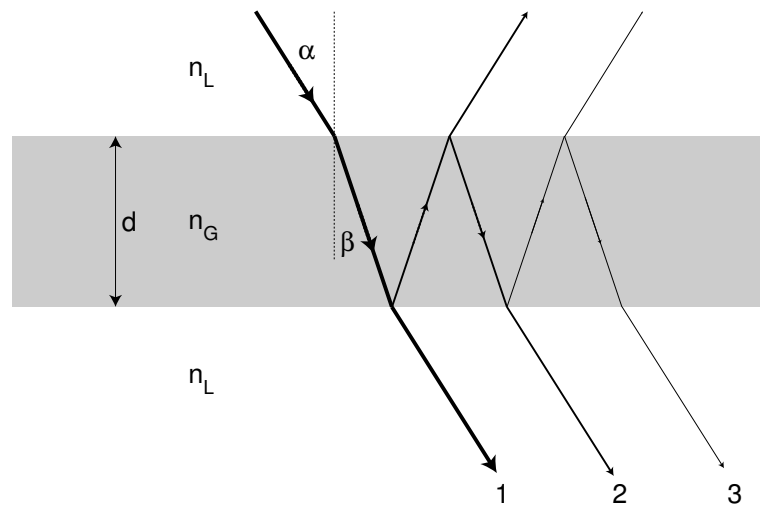


Abbildung 2: Interferenz an einem dünnen Plättchen. Zu sehen ist die optische Weglängendifferenz zwischen dem direkt transmittierten Strahl und dem je einmal an beiden Grenzflächen reflektierten Strahl. Eingezeichnet sind der Einfallswinkel α , der Winkel des gebrochenen Strahls β , die Dicke des Plättchens d und die Brechzahlen von Luft n_L und Glas n_G .

Für maximale Reflektion, also in den Minima der Vielstrahlinterferenz, gilt für die Reflektivität des Plättchens für Winkel in der Nähe des Brewster-Winkels nach [?]:

$$R_{\parallel}^{max} \approx 4|r_{\parallel}|^2 \quad (15)$$

r_{\parallel} ist der Fresnel-Koeffizient für Reflexion wenn der elektrische Feldvektor der einfallenden Strahlung parallel zur Einfallsebene schwingt.

$$r_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (16)$$

Für die optische Weglängendifferenz zwischen dem direkt transmittierten Strahl und dem je einmal an beiden Grenzflächen reflektierten Strahl gilt nach [?]:

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad (17)$$

Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn der Gangunterschied zwischen den einzelnen Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist:

$$\Delta s_{\text{konstruktiv}} = k\lambda \quad (18)$$

mit $k \in \mathbb{N}$.

2.5.2. Brewster-Winkel

Fällt Licht unter dem so genannten Brewster-Winkel α_B auf eine Oberfläche, das heißt der Winkel zwischen dem reflektierten und dem transmittierten Strahl wird $\frac{\pi}{2}$, so wird nur der senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Teil des Lichts reflektiert.

Ist das Licht des verwendeten Lasers wie in unserem Fall also parallel zur Einfallsebene eines Plättchens im Strahlengang polarisiert, kann im Brewster-Winkel kein Licht reflektiert werden und die Transmission wird maximal.

Die Brechzahl eines Glasplättchens ergibt sich aus dem Brewster-Winkel (wieder bei Annahme von $n_{\text{Luft}} = 1$) aus

$$n_G = \tan \alpha_B. \quad (19)$$

3. Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 zu sehen. Auf einer optischen Bank befindet sich eine He-Ne Röhre. An deren einem Ende ist ein Auskoppelspiegel (Spiegel 2) mit relativ hoher Transmission $T_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ fest montiert. Am anderen Ende der Röhre befindet sich ein Brewster-Fenster, aus dem polarisiertes Licht austritt und auf einen verschiebbaren Spiegel (Spiegel 1) mit geringer Transmission $T_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ fällt. Die Absorption der Spiegel beträgt $A = 3 \cdot 10^{-3}$. Die durchstrahlte Länge des Resonators ist $l_{\text{Res}} = (0.57 \pm 0.01)$ m, die Länge des Verstärkermediums $l_{\text{Verstärk}} = 0.3$ m.

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1. Justieren des Lasers

Mit Hilfe von Justierschrauben an Spiegel 1 und eines Justierkreuzes mit Lochblende hinter Spiegel 1 wird das Starten des Laservorgangs erzielt. Über eine Linse hinter Spiegel 2 wird das Profil des Laserstrahls an der Wand vergrößert abgebildet. Es zeigt sich an der Wand das Muster der TEM_{00} -Mode. Außerdem sind mehrere Interferenzringe zu sehen. Wir vermuten, dass deren Ursache überlagerte Transversalmoden sind. Wird die Linse hinter Spiegel 1 entfernt, so kann die Ausgangsleistung mit einer Photodiode gemessen werden. Aufgrund der geringen Intensität von $P_0 = 0,50 \text{ mW}$ reinigt der Betreuer zunächst Spiegel 1, woraufhin sich die Leistung auf $P'_0 = 0,58 \text{ mW}$ erhöht. Nach Reinigen des Brewster-Fensters wird eine noch deutlich größere Leistungszunahme auf $P = (2,85 \pm 0,01) \text{ mW}$ erzielt. Um auch die Modenkopplung im Versuchsteil 4.7 beobachten zu können stellen wir die Resonatorlänge auf $l_{Res} = (0,57 \pm 0,01) \text{ m}$ ein.

4.2. Strahldurchmesser im Laserresonator

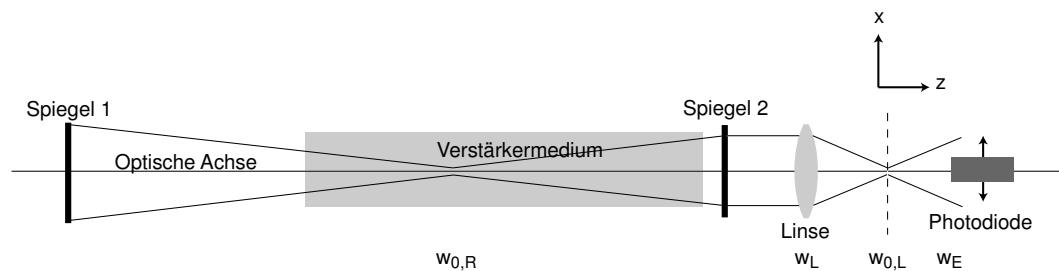


Abbildung 3: Skizze zum Versuchsaufbau „Strahldurchmesser im Laserresonator“. Zur Bezeichnung der eingetragenen Größen siehe Text.

Zur Aufzeichnung der Intensitätsverteilung der TEM_{00} -Mode weiten wir den Laserstrahl wieder mit einer Linse hinter Spiegel 2 auf. Außerdem setzen wir eine Photodiode auf die optische Bank. Ihr Abstand von der Linse beträgt $d = (44 \pm 1) \text{ cm}$. Die Photodiode ist in x -Richtung verschiebbar, siehe Abbildung 3. Vor der Photodiode ist eine Blende montiert, mit der die Ortsauflösung der Messung erhöht werden kann.

Die Messwerte sind in Tabelle 1 aufgelistet, die graphische Auftragung und Auswertung sind in Abbildung 4 zu sehen. Bei Betrachtung des Graphen drängt sich wiederum der Verdacht auf, dass nicht nur die longitudinale Mode angeregt war, denn an der linken Flanke fällt die Kurve nicht wie erwartet ab, sondern bildet einen Sockel. Aus diesem Grund flossen diese Punkte der linken Flanke auch nicht in die Auswertung mit ein.

Nach Gleichung (7) und (8) gilt für die Feldamplitude in Abhängigkeit von x für die TEM_{00} -Mode

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

x/mm	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	-
U/mV	204	222	236	256	267	283	294	302	310	316	-
x/mm	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	-
U/mV	319	324	320	321	320	313	306	300	288	274	-
x/mm	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	-
U/mV	263	250	238	220	196	166	135	093	063	050	-
x/mm	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
U/mV	076	069	061	061	066	042	033	037	026	033	020

Tabelle 1: Messung des Intensitätsprofils des mit einer Linse aufgeweiteten Strahls aufzuzeichnen

$$\sqrt{I_n(x)} \propto e^{-\frac{x^2}{w_E^2}} \quad (20)$$

ein Gauß-Profil. Die *Mathematica*-Ausgabe des **NonlinearFit** liefert für den Bündelquerschnitt am Ort der Photodiode $w_E = (2,296 \pm 0,056)$ mm.

Über die Beziehung (13) lassen sich nun der minimale Bündelquerschnitt im Brennfleck der Linse $w_{0,L}$ und der Bündelquerschnitt am Ort der Linse w_L berechnen. Die Intensität im Brennfleck, die einer Leistungsdichte entspricht, kann aus der gemessenen Ausgangsleistung P des Lasers hinter Spiegel 2 und des Bündelquerschnitts im Brennfleck mit der Beziehung

$$I \approx \frac{P}{\pi \cdot \left(\frac{w_{0,L}}{2}\right)^2} \quad (21)$$

abgeschätzt werden.

Unabhängig davon kann man den Bündelquerschnitt am Ort der Linse noch vom Resonator kommend berechnen. Es sollten sich die selben Werte ergeben. Der minimale Bündelquerschnitt im Resonator $w_{0,R}$ befindet sich zwischen den beiden Resonatorspiegeln 1 und 2. Dieser minimale Bündelquerschnitt $w_{0,R}$ ist durch die Brennweiten der Spiegel $b_1 = 2,3$ m und $b_2 = 2,0$ m festgelegt (aus [?], S. 16), denn die Brennweiten sind gleich den Krümmungen des Laserstrahls am Ort der Spiegel. Zusammen mit der Länge des Resonators l_{Res} lässt sich über die Beziehung (14) die z -Position der Strahltaile berechnen. Es ergibt sich für dessen Abstand a zum Spiegel 1 $a = 25$ cm. Daraus wiederum kann man den Bündelquerschnitt in der Strahltaile des Resonators $w_{0,R}$ ermitteln. Mit Gleichung (13) ergibt sich nun wiederum der Bündelquerschnitt $w_{Spiegel,R}$ am Ort des Spiegels 2. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

Laut [?] sollten die Werte w_L und $w_{Spiegel,R}$ übereinstimmen. Dies passt bei unserer Messung nur größenordnungsmäßig. Vermutlich ist die Ursache der Abweichung die nicht rein angeregte TEM₀₀-Mode.

Für die Berechnung des Bündelquerschnitts in 100 m Distanz ohne aufweitende Linse wurde w_L verwendet, da sie für die real erzeugte Mode einen realistischen Wert liefert.

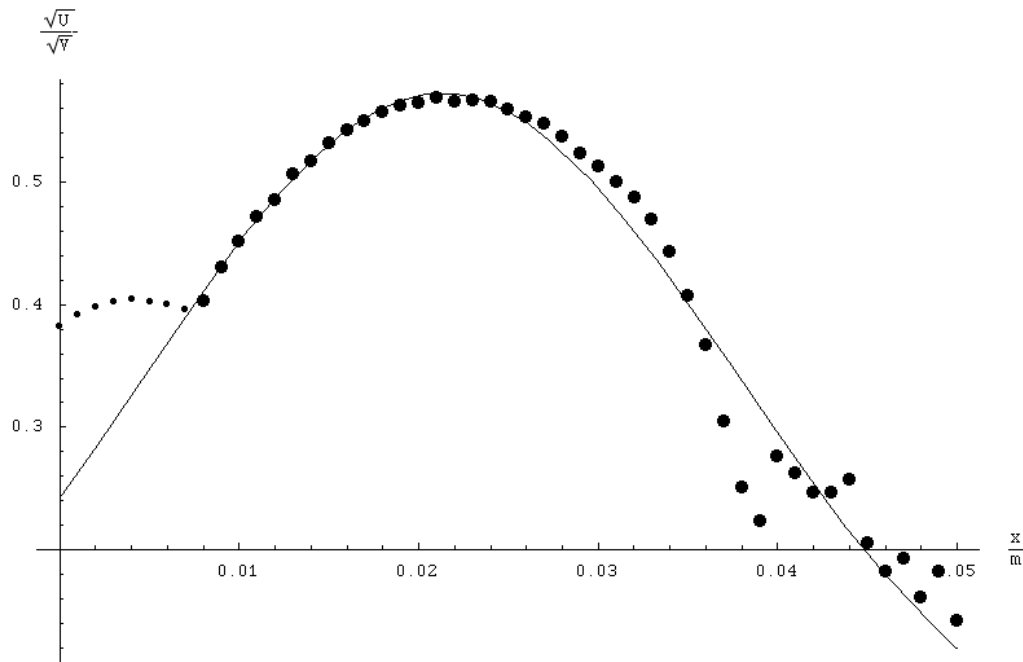


Abbildung 4: Gauß-Profil einer TEM_{00} -Mode. Dazu ist die Wurzel der Photospannung über der x -Position aufgetragen. Der Sockel an der linken Flanke ist vermutlich eine transversale Mode. Daher flossen nur die dicker gezeichneten Punkte in den Gauß-Fit mit ein, der mit eingezeichnet ist.

Fehlerbetrachtung Für die Berechnung der Fehler werden folgende Annahmen gemacht:

- Für den Abstand d der Linse zur Photodiode wird ein Fehler von ± 1 cm angenommen, da am Tag der eigentlichen Messung leider vergessen wurde, diesen Wert genauer zu ermitteln. Er kann allerdings mit ± 1 cm doch gut rekonstruiert werden, da der Laser auf der optischen Bank noch nicht verrückt wurde und die Photodiode am Ende der optischen Bank platziert war.
- Der statistische Ablesefehler der Photospannung von $\pm 0,5$ mV wurde nicht explizit weitergeführt, sondern die *Mathematica*-Ausgabe der Bestimmung von w_E übernommen.
- Die Länge des Resonators wird mit ± 1 cm angenommen.
- Alle in der Anleitung [?] angegeben Größen werden als fehlerlos angenommen.

Alle in Tabelle 2 angegebenen Fehler berechnen sich aus den oben gemachten Annahmen mithilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

4.3. Darstellung verschiedener Moden

Nun wird die Photodiode aus dem Strahlengang entfernt, sodass der aufgeweitete Laserstrahl wieder an der Wand beobachtet werden kann. Außerdem wird eine „Modenblende“, welche

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

Bündelquerschnitt am Ort der Photodiode w_E	$(2,296 \pm 0,077)\text{mm}$
Bündelquerschnitt im Brennpunkt der Linse $w_{0,L}$	$(5,69 \pm 0,20)\mu\text{m} \approx 9\lambda_{He-Ne}$
Leistungsdichte I im Brennpunkt der Linse	$0,11 \frac{\text{GW}}{\text{m}^2}$
Bündelquerschnitt am Ort der Linse w_L	$(0,709 \pm 0,025)\text{mm}$
Bündelquerschnitt in der Mitte des Resonators $w_{0,R}$	$(0,3809 \pm 0,0014)\text{mm}$
Bündelquerschnitt bei den Resonatorspiegeln $w_{\text{Spiegel},R}$	$(0,4151 \pm 0,0015)\text{mm}$
Bündelquerschnitt in 100m Distanz $w(100m)$	$(28,4 \pm 1,0)\text{mm}$

Tabelle 2: Zusammenfassung der Ergebnisse des Versuchsteils 4.2

einfach aus einem dünnen Draht besteht, in den Resonator bei verschiedenen z -Positionen eingebracht. Der Draht ist in x -Richtung über eine Verstellerschraube verschiebbar, die x -Position mit einer Skala von 0,01 mm Auflösung ablesbar.

Befindet sich der Draht genau in der Mitte des Laserstrahls bei x_1 , so erscheint die TEM₁₀-Mode, siehe Abbildung 5. Die x -Position wird notiert und markiert den Nullpunkt. Deswegen werden im Folgenden immer Abweichungen von diesem Wert betrachtet. Sodann verschieben wir den Draht leicht. Das Bild der TEM₁₀-Mode verschwindet. Ein bisschen weiter, bei $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, erscheint die deutlich schwächere TEM₂₀-Mode, siehe Abbildung 6. Wird der Draht noch weiter in x -Richtung verschoben, erscheint wieder die Grundmode TEM₀₀. Da die TEM₂₀-Moden symmetrisch in beiden Richtungen um die TEM₁₀-Mode angeordnet sind, ergeben sich zwei Δx_2 -Werte. Die gemessenen x -Werte sind in Tabelle 3 aufgelistet.

$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{x_1}{\text{mm}}$	$\frac{x_{2,\text{unten}}}{\text{mm}}$	$\frac{x_{2,\text{oben}}}{\text{mm}}$	$\frac{w(z)}{\text{mm}}$
50	14,25	14,09	14,42	0,33
108	14,48	14,35	14,66	0,31
200	14,36	14,23	14,51	0,28

Tabelle 3: Messwerte und Ergebnisse zum Abschnitt 4.3. d ist dabei der Abstand des Drahtes zum Spiegel 1, x_1 die x -Position des Drahtes bei Selektion der TEM₁₀-Mode, $x_{2,\text{unten}}$ und $x_{2,\text{oben}}$ sind die Positionen der TEM₂₀-Moden. Aus ihnen lässt sich der Bündelquerschnitt $w(z)$ berechnen.

Die Modenblende hat folgende Wirkung: Der Draht lässt nur noch Schwingungsmoden im Resonator zu, die am Ort des Drahtes ein Intensitätsminimum besitzen. Alle anderen Moden werden unterdrückt. Laut Gleichung (7) folgt so für die TEM₂₀-Mode

$$I_2 \propto |H_2(\Delta x_2)|^2 = 0. \quad (22)$$

Zusammen mit den Gleichungen (10) und (11) ergibt sich

$$w(z) = 2 \cdot \Delta x_2. \quad (23)$$



Abbildung 5: Photographie der TEM_{10} -Mode. Das Bild wurde invertiert und der Kontrast erhöht. Im rechten unteren Teil der Mode ist eine Interferenzerscheinung erkennbar, deren Herkunft wir nicht klären können.

Da bei der Messung zwei Δx_2 -Werte ermittelt werden, wird deren Mittelwert gebildet. So fallen Ungenauigkeiten bei der Einstellung der relativ breiten TEM_{10} -Mode wieder heraus. Da der Mittelwert für die $w(x)$ Berechnung sowieso wieder verdoppelt wird, ergibt sich $w(x)$ einfach aus der Differenz der beiden x_2 -Werte, weswegen die Δx_2 -Werte gar nicht mehr in Tabelle 3 auftauchen.

Man erkennt in den $w(z)$ eine Abnahme zur Mitte des Resonators hin. Obwohl die Resonatorlänge zwischen den Versuchsteilen nicht verändert wird, ergeben sich aber nochmal deutlich kleinere Werte als in Abschnitt 4.2. Dies überrascht, da die TEM_{20} -Moden sehr scharf sind und so die Fehler der $w(x)$ -Werte nicht so groß sein können, um diese Abweichung zu erklären.

4.4. Abschätzung des Verstärkungsfaktors

Zur Abschätzung des Verstärkungsfaktors wird ein regelbarer Verlust in den Strahlengang des Lasers gebracht. Dies wird mit einem drehbaren dünnen Plättchen realisiert, dessen Reflektion nach Gleichung (15) abhängig vom Einfallswinkel ist. Auf diese Weise kann der Brewster-Winkel α_B bestimmt werden, bei dem maximale Transmission gemessen wird (siehe 2.5.2). Außerdem können so diejenigen Winkel bestimmt werden, bei denen der Reflektionsverlust am Plättchen so groß ist, dass der Laser-Betrieb erlischt, das sind die Grenzwinkel α_g .

Für die kommenden drei Versuchsteile wird der Graph ausgewertet, der mit dem x - t -Schreiber aufgenommen wurde.

Die Eichung des Graphen erfolgt anhand des bekannten Start- und Endwinkels des Plättchens. Vom Graphen werden dann der Brewster- und die Grenzwinkel nach Augenmaß abgelesen.

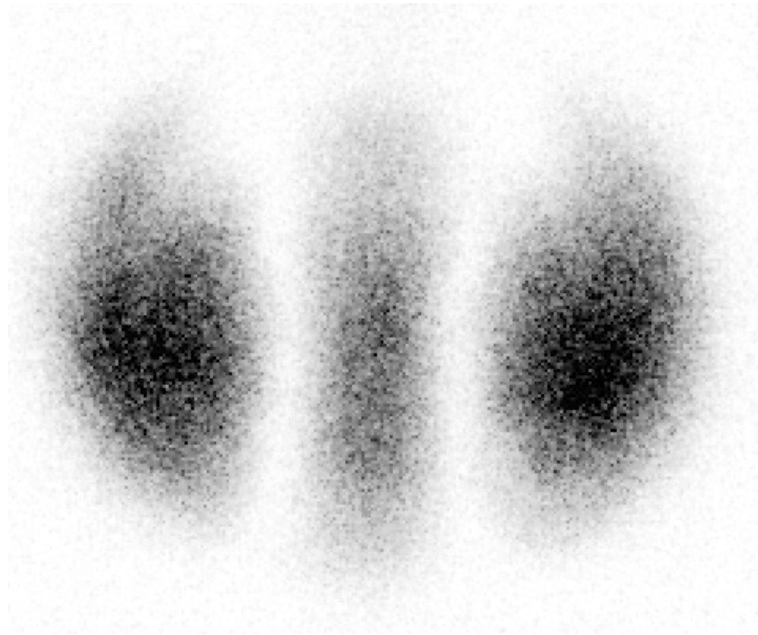


Abbildung 6: Photographie der TEM_{20} . Das Bild wurde ebenfalls invertiert und der Kontrast erhöht.

$$\begin{aligned}\alpha_B &= (56.01 \pm 0.84)^\circ \\ \alpha_{g1} &= (46.37 \pm 0.37)^\circ \\ \alpha_{g2} &= (62.37 \pm 0.45)^\circ\end{aligned}$$

Fehlerrechnung Die Fehler in den abgelesenen Winkeln setzen sich zusammen aus einem Fehler in der Eichung und einem Ablesefehler, beim Brewster-Winkel kommt noch eine Korrektur aufgrund einer Welle im Papier hinzu. Der Fehler in der Eichung (Ablese des Start- und Endwinkels am Drehteller des Glasplättchens) wird zu 0.5° abgeschätzt.

Der Ablesefehler wird als mittlerer Abstand zur benachbarten Vielstrahlinterferenzordnung gleicher Phase abgeschätzt.

Der Brewster-Winkel wird nicht wie die anderen Winkel auf der Grundlinie abgelesen, sondern bei einer Höhe von etwa 85 Einheiten (siehe Graph im Anhang). Da sich – vermutlich aufgrund eines vorherigen Papierstaus oder Ähnlichem – eine (kleine) Welle durch das Papier zog, sind die Maxima der Vielstrahlinterferenz nicht symmetrisch, sondern leicht nach links verzogen. Dieser Verzug wird gemessen und der Brewster-Winkel daraufhin korrigiert. Die Korrektur beträgt 0.24° .

4.4.1. Brechungsindex des Glasplättchens

Der Brechungsindex des Glasplättchens ergibt sich nach Gleichung (19) zu $n_G = 1.483 \pm 0.047$ und ist mit dem Literaturwert von ≈ 1.5 [?] vereinbar.

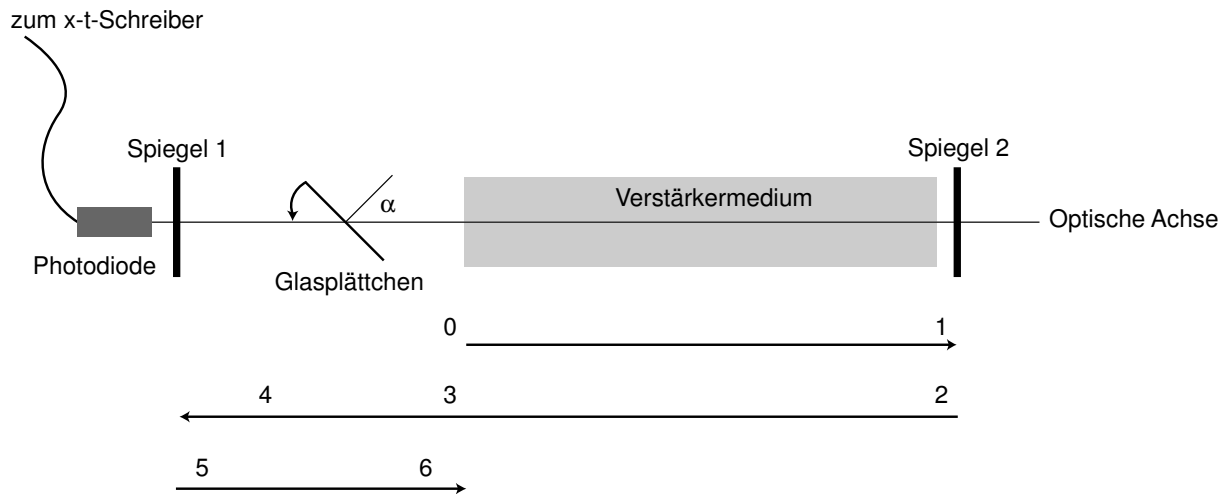


Abbildung 7: Versuchsaufbau zur Bestimmung des Verstärkungsfaktors. Der Winkel des Glasplättchens lässt sich über einen Schrittmotor kontinuierlich verändern. Hinter Spiegel 1 befindet sich eine Photodiode, die die Laser-Leistung registriert und mit einem x - t -Schreiber verbunden ist. Zu den mit Nummern bezeichneten Positionen siehe Text.

Fehlerrechnung Der Fehler ergibt sich aus einer Fehlerfortpflanzungsrechnung aus dem Fehler in der Bestimmung des Brewster-Winkels.

$$\sigma_n = \frac{\partial n}{\partial \alpha_B} \sigma_{\alpha_B} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_B} \sigma_{\alpha_B}$$

4.4.2. Dicke des Glasplättchens

Zur Bestimmung der Dicke des Glasplättchens werden mehrere Maxima ausgemessen. Wegen der in 4.4 beschriebenen Welle im Papier wird das Maximum stets von der Grundlinie aus als Mittelpunkt zwischen den Flanken des Maximums ermittelt.

Die Winkel der Maxima sind in Tabelle 4 zusammengestellt. In der Nähe des Brewster-Winkels, wo die Minimalintensität nicht mehr auf Null zurückgeht, werden zu den Maxima wieder wie oben beschrieben 0.24° als Korrektur für das gewellte Papier addiert.

Ermittelt man gemäß Gleichung (17) eine lineare Regressionsgerade für

$$k = d \cdot \frac{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\lambda} \quad (24)$$

und bestimmt d aus der Steigung, so erhält man $d = (147.71 \pm 0.61) \mu\text{m}$, in Übereinstimmung mit der Herstellerangabe „etwa $150 \mu\text{m}$ “.

Ordnung k	1	11	21	31	41	51	61	71	81
Winkel / °	1.63	14.26	20.40	25.23	29.40	33.09	36.56	39.87	43.07
Ordnung k	91	101	111	121	131	141	151	161	—
Winkel / °	46.21	49.41	52.66	55.90	59.31	62.93	66.94	71.44	—

Tabelle 4: Zur Bestimmung der Plättchendicke aus dem Abstand der Interferenzmaxima. Tabelle der Winkel (aus den abgelesenen Daten berechnet) und den zugehörigen Ordnungen. Zu den Winkeln der Maxima 101 bis 131 wurden aufgrund der Welle im Papier wie oben beschrieben 0.24° als Korrektur addiert.

Fehlerrechnung Der Fehler in d wird aus der linearen Regression entnommen. Für drei Werte wird zum Vergleich der Fehler gemäß Fehlerfortpflanzung aus Gleichung (17) berechnet². Der Fehler ist für jeden Datenpunkt unterschiedlich, weswegen der gemittelte Fehler aus *Mathematica* übernommen wird.

4.4.3. Verlust-Gewinn-Bilanz des Lasers

Bei den Grenzwinkeln α_{g1}, α_{g2} erlischt der Laser gerade das erste Mal im Minimum der Vielstrahlinterferenz. Dieser Winkel kann daher dafür verwendet werden, die Laser-Verstärkung zu berechnen.

Dazu verfolgt man den Laser-Strahl im Resonator (siehe Schema des Versuchsaufbaus in Abbildung 7 auf Seite 15) vom linken Rand des aktiven Mediums ausgehend.

- **Position 0** Anfangsintensität I_0
- **1** Intensität nach Durchlaufen des Verstärkermediums: $I_1 = G'(\nu)I_0$
- **2** ... nach Reflektion an Spiegel 2: $I_2 = R_2I_1$
- **3** ... nach einem weiteren Durchlaufen des Verstärkermediums: $I_3 = G'(\nu)I_2$
- **4** ... nach Transmission an dem Glasplättchen: $I_4 = T_GI_3$
- **5** ... nach Reflektion an Spiegel 1: $I_5 = R_1I_4$
- **6** ... nach Transmission an dem Glasplättchen: $I_6 = T_GI_5$

Zur Verdeutlichung ist die Intensität an den verschiedenen Punkten in Abbildung 8 dargestellt. Bei der so genannten Laser-Schwelle werden die Verluste an den Spiegeln und dem Plättchen gerade durch den Gewinn im Verstärkermedium kompensiert. Man erhält mit der Bedingung $I_6 = I_0$:

² $\sigma_{0-11} = 7.7 \cdot 10^{-8}, \sigma_{0-51} = 4.3 \cdot 10^{-7}, \sigma_{0-111} = 1.3 \cdot 10^{-6}$

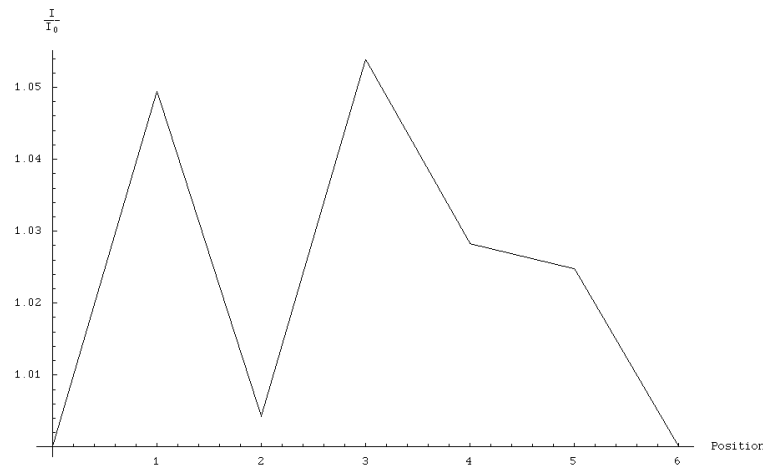


Abbildung 8: Intensität des Laser-Strahls an der Laser-Schwelle in Abhängigkeit der Position im Resonator. Zur Bezeichnung der Positionen siehe Abbildung 7 auf Seite 15

$$\frac{I_6}{I_0} = R_1 R_2 T_G^2 G'(\nu)^2 = 1 \quad (25)$$

Nach Einsetzen von Gleichung (4) und Auflösen nach α ergibt sich:

$$\alpha = \frac{\ln(R_1 R_2 T_G^2)}{l_{\text{Verstärk}}} \quad (26)$$

Man erhält so einen Absorptionskoeffizienten (= Leerlaufverstärkung)

$\alpha(\nu_0) = g_0 = -(0.16062 \pm 0.00051) \frac{1}{\text{m}}$. Der Verstärkungsfaktor, das ist der Gewinn bei einem Umlauf, ergibt sich zu $G = \frac{I}{I_0} = 1.10117 \pm 0.00017$.

Für die weitere Auswertung werden außerdem folgende Größen benötigt:

- $R_1 = 1 - T_1 - A = 0.9966$
- $R_2 = 1 - T_2 - A = 0.957$
- Modenabstand nach Gleichung (6): $\Delta\nu = 262.98 \text{ MHz}$
- Mittlere Transmission des Glasplättchens am Grenzwinkel aus Gleichung (15): $T_G = 0.975790 \pm 0.000075$.

Fehlerabschätzung Der Fehler der oben aufgelisteten Größen ergibt sich jeweils aus den beiden Grenzwinkeln. Alle Berechnungen werden für α_{g1} und α_{g2} sowie für einen mittleren Grenzwinkel $\overline{\alpha_g}$ durchgeführt. Für den Fehler in $\overline{\alpha_g}$ wird angesetzt

$$\sigma_{\overline{\alpha_g}} = \frac{\overline{\alpha_g} - \alpha_{g1}}{2}.$$

Die weiteren Fehler werden aus den Abweichungen der Funktionswerte für die beiden Grenzwinkel abgeschätzt.

4.5. Anzahl der zum Laser-Betrieb beitragender Moden

Um die Zahl der anschwingenden Moden berechnen zu können, wird noch der Verlust im Resonator benötigt. Dieser ergibt sich aus Gleichung (26) unter Weglassung der Verluste durch das Plättchen, das ja im Normalbetrieb nicht im Resonator ist, zu

$$\gamma = \frac{\ln(R_1 R_2)}{2l_{\text{Verstärk}}}. \quad (27)$$

Hier ist wieder der Faktor 2 aus Gleichung (3) eingeführt. γ bezieht sich also auf den Verlust nach zweimaligem Durchlaufen des Lasers.

Unter der Annahme, dass nur TEM₀₀-Moden anschwingen und eine dieser außerdem mit der Zentralfrequenz des Verstärkungsprofils zusammenfällt, lässt sich nun die Anzahl der anschwingenden Moden aus einem Graphen ablesen. Dazu trägt man das Verstärkungsprofil (Verstärkungsfaktor über Frequenz), den Modenabstand und den Resonatorverlust auf. Alle Moden, deren Schnittpunkt mit dem Verstärkungsprofil oberhalb des Resonatorverlusts liegen, werden verstärkt. So liest man aus Abbildung 9 ab, dass fünf Moden verstärkt werden.

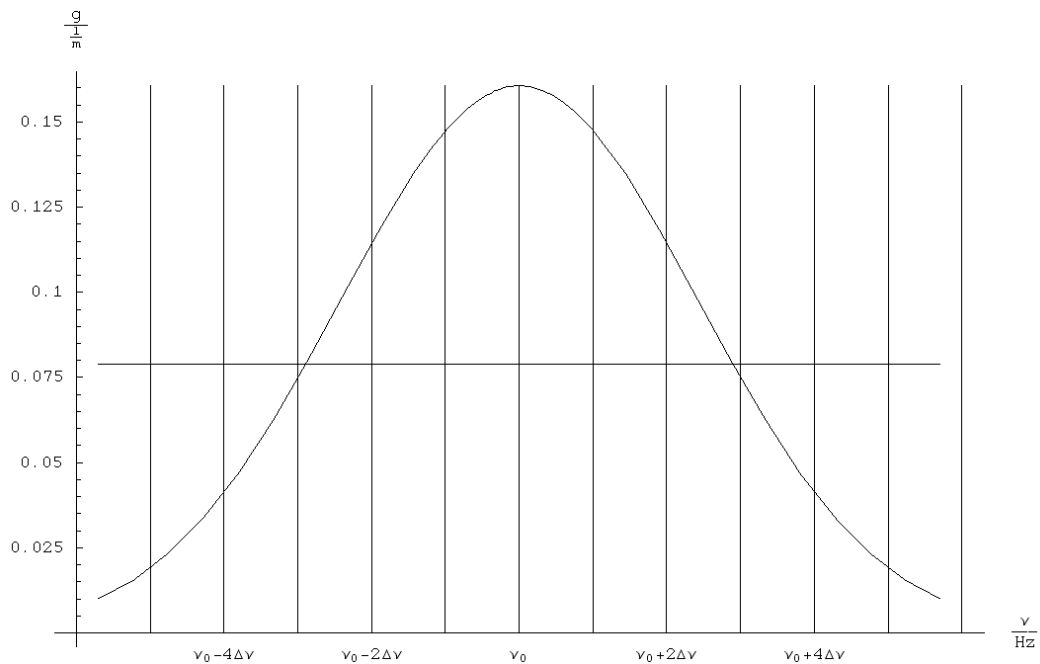


Abbildung 9: Verstärkungsprofil mit eingezeichneten Moden (vertikale Linien) und Verlust im Resonator (horizontale Linie). Alle Moden, deren Verstärkung den Verlust überwiegt, schwingen an.

4.6. Beobachtung von Lasermoden

In Versuchsteil 4.5 wurde berechnet, dass im Resonator fünf longitudinale Moden zum Laser-Betrieb beitragen. Diese sollen nun direkt beobachtet werden. Dazu wird hinter Spiegel 2 (siehe

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

Abbildung 3) ein weiterer Spiegel 3 im Abstand $d_{23} = 8,0 \text{ cm}$ in den Strahlengang gebracht. So erhält man einen Fabry-Perot-Resonator, dessen Reflektivität sehr stark von der Wellenlänge abhängt

$$R_{23} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (28)$$

wobei die Finesse F über

$$F = \frac{4R_r}{(1 - R_r)^2} \quad (29)$$

vom Reflexionsvermögen $R_r = 0,98$ der Spiegel 2 und 3 abhängt. Die Phasendifferenz δ zwischen zwei reflektierten oder transmittierten Teilstrahlen ist dabei

$$\delta = \frac{2\pi 2d_{23}}{\lambda}. \quad (30)$$

Eine Veränderung der Reflektivität des Fabry-Perot-Resonators moduliert die Ausgangsleistung des Lasers, die wir hinter dem Spiegel 1 messen. Bei ruhendem Spiegel 3 erhöht sich so die Leistung von $P_1 = 0,080 \text{ mW}$ auf $P_{1,F} = 0,155 \text{ mW}$. Nun wird der Spiegel 3 über einen Piezomodulator, an dem eine Dreiecksspannung liegt, mit $f = 500 \text{ Hz}$ hin und her bewegt. Damit verschiebt sich bei konstanter Phase δ auch das Reflexionsminimum zu anderen Wellenlängen. Schiebt sich das Reflexionsminimum auf die Wellenlänge einer angeregten longitudinalen Mode, so nimmt die Gesamtintensität des Lasers ab. Aufgrund der extremen Schärfe des Reflexionsminimums können so die beteiligten Moden aufgelöst werden. Das Signal der Laserintensität legen wir invertiert auf den Oszillographen. Mit der Dreiecksspannung triggern wir das Signal. Da die Spannung des Dreiecksignals außerhalb des Messbereichs des Oszillographen liegt, muss das Signal zur Messung der Spannung mit einem Abschwächkabel heruntertransformiert werden. Damit man später auf die wahre Spannung zurückrechnen kann, muss man zunächst den Verstärkungsfaktor bestimmen. Dazu messen wir bei konstanter Amplitude des Dreiecksgenerators die Spannung mit und ohne Abschwächkabel. Es ergibt sich $V = \frac{354 \text{ V}}{36,2 \text{ V}}$.

Am Oszillographen erkennt man bei richtiger Einstellung der Amplitude der Dreiecksspannung und des Laserspiegels mehrere Minima. Die Einstellung erfordert viel Fingerspitzengefühl. Manchmal erkennen wir 3, 4 oder auch 5 Minima, das Signal ist meist sehr verrauscht. Mit Hilfe der Speicherfunktion des Oszillographen lesen wir nun die Abstände und Halbwertsbreiten der Peaks ab. Diese sind allerdings nun in Zeiten gegeben und müssen in Frequenzabstände umgerechnet werden. Folgende Überlegungen sind dazu erforderlich:

- Am Oszillographen werden Zeitunterschiede abgelesen. Die Spannung am Dreiecksgenerator errechnet sich über die am Oszillographen gemessenen Peak to Peak Werte der Dreiecksspannung $U_{PP} = 206 \text{ V}$, dem Verstärkungsfaktor $V = \frac{354}{36,2}$ und der Frequenz $f = 500 \text{ Hz}$ des Dreiecksgenerators.
- Die angegebene Eichkonstante von $C = 5 \text{ nm/V}$ ermöglicht eine Umrechnung der Dreiecksspannung in eine Auslenkung des Spiegels 3.

- Weiterhin gilt bei konstanter Phase δ mit Beziehung (30) für kleine Abweichungen aus den Ursprungswerten $\Delta x/x \ll 1$ für Frequenzunterschiede $\Delta\nu = \frac{\nu}{d_{23}} \cdot \Delta d_{23}$

Abstände der Peaks in μs	76	72	104	84	
FWHM der Peaks in μs	32	32	36	40	40

Tabelle 5: Messwerte für Abschnitt 4.6. Die Messwerte geben die Abstände und Breiten der auf dem Oszillographen, beobachteten Lasermoden wieder.

In Tabelle 5 sind die Messwerte zusammengefasst. Aus den Messwerten werden Mittelwerte gebildet, die dann in die obigen Beziehungen eingesetzt werden. Hieraus ergibt sich ein Modenabstand von $(\Delta\nu)_{Abstand} = 5,02 \cdot 10^9$ Hz und eine Modenbreite von $(\Delta\nu)_{FWHM} = 2,62 \cdot 10^9$ Hz. Diese Werte sind jedoch unrealistisch. Eine kurze Abschätzung mit Gleichung (6) liefert einen etwa 20-fach kleineren Wert von $(\Delta\nu)_{Abstand} = 2,6 \cdot 10^8$ Hz. Eigentlich kann dieser nur an einem systematisch falsch gemessenen U_{PP} liegen. Wo der Fehler genau liegt ließ sich trotz intensiver Fehlersuche und -diskussion nicht mehr rekonstruieren. Eine mögliche Fehlerquelle ist das Verstärkungskabel, dessen Lötkontakte während des Versuchs aufgebrochen sind.

4.7. Messung der Lichtgeschwindigkeit

Laut Theorieteil schwingen die unterschiedlichen longitudinalen Moden nicht unabhängig voneinander. Sie sind fest in Phase gekoppelt. Daraus ergibt sich, dass die Laserintensität mit der Differenzfrequenz der gekoppelten Schwingungen moduliert ist, dieser Effekt wird Schwebung genannt. Zur Messung der Schwebungsfrequenz wird hinter den Spiegel 2 eine sehr schnelle Photodiode installiert. Das Signal wird in einem Resonanzverstärker. Stellt man die Resonanzfrequenz ein, so erkennt man dies am Ausschlag eines Pegelmessers. Die genaue Frequenz wird mit einem externen Frequenzmesser ermittelt. Zur Auswertung werden die Schwebungsfrequenzen $\Delta\nu_1$ und $\Delta\nu_2$ bei zwei verschiedenen Resonatorlängen l_{Res} und $l_{Res} + \Delta l_{Res}$ benötigt, wobei Δl_{Res} sehr genau bekannt sein muss. Dazu steht ein Abstandsstück mit $\Delta l_{Res} = 0.19988$ m zur Verfügung.

Für jede Position werden zehn Messwerten von beiden Autoren unabhängig voneinander aufgenommen, um zu prüfen, wie genau die Resonanz eingestellt werden kann. Außerdem wird die Verschiebung des Spiegels zwei Mal durchgeführt, um die Reproduzierbarkeit der Verschiebung zu untersuchen. In Tabelle 6 sind die Messwerte aufgelistet. Bei genauer Betrachtung der Tabelle erkennt man, dass die größten Streuungen durch das Verschieben des Spiegels, nicht etwa durch das zweimalige Ausmessen an derselben Position, entstehen. Deswegen werden zunächst die Mittelwerte der Messungen an einer Position gebildet. Anschließend werden die Messungen an den beiden Orten gemittelt. Als Fehler wurde die Abweichung bei zweimaliger Einstellung derselben Position angenommen. Die Schwebungsfrequenzen bestimmen sich so zu $\Delta\nu_1 = (275,76 \pm 0,10)$ MHz und $\Delta\nu_2 = (201,595 \pm 0,060)$ MHz.

Stellt man die Gleichung für den longitudinalen Modenabstand (6) für l_{Res} und $l_{Res} + \Delta l_{Res}$ auf, so ergibt sich für die Lichtgeschwindigkeit, bei Eliminierung der schwierig zu bestimmenden

4. Versuchsdurchführung und Auswertung

Resonatorlänge l_{Res}

$$c = \frac{2 \cdot \Delta l_{Res}}{\frac{1}{\Delta \nu_2} - \frac{1}{\Delta \nu_1}}. \quad (31)$$

Dies ergibt für die Lichtgeschwindigkeit den Wert $c = (2,9964 \pm 0,0046) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Außer den Fehlern fließt über das Fehlerfortpflanzungsgesetz der angenommene Fehler in Δl_{Res} von $\pm 0,000005 \text{ m}$ mit ein. Der Literaturwert der Lichtgeschwindigkeit ist $c = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [?].

	$\Delta \nu_2$ in MHz	$\Delta \nu_1$ in MHz		$\Delta \nu_2$ in MHz	$\Delta \nu_1$ in MHz
1	201.647	275.87	21	201.536	275.679
2	201.650	275.86	22	201.491	275.676
3	201.648	275.86	23	201.532	275.674
4	201.646	275.87	24	201.537	275.677
5	201.665	275.86	25	201.538	275.673
6	201.652	275.87	26	201.539	275.674
7	201.654	275.86	27	201.536	275.671
8	201.648	275.87	28	201.538	275.670
9	201.650	275.87	29	201.538	275.673
10	201.650	275.87	30	201.536	275.679
11	201.661		31	201.535	275.644
12	201.662		32	201.549	275.633
13	201.663		33	201.536	275.348
14	201.662		34	201.539	275.649
15	201.664		35	201.538	275.650
16	201.657		36	201.540	275.646
17	201.663		37	201.536	275.664
18	201.651		38	201.537	275.644
19	201.648		39	201.541	275.657
20	201.647		40	201.538	275.659

Tabelle 6: Schwebungsfrequenzen bei verschiedenen Resonatorlängen. Ab Messnummer 21 wurden die Messung zur Überprüfung der Reproduzierbarkeit der Resonatorlänge bei den gleichen z -Positionen wiederholt.

A. Bildnachweis

Alle Bilder und Zeichnungen wurden von den Autoren selbst angefertigt.

Literatur

- [1] E. Batke. *Anleitung zum Fortgeschrittenenpraktikum*. Physikalisches Institut der Universität Würzburg, 2004.
- [2] W. Demtröder. *Laserspektroskopie – Grundlagen und Techniken, Zweite Auflage*. Springer-Verlag, 1991.
- [3] J. Eichler; H.J. Eichler. *Laser – Bauformen, Strahlführung, Anwendungen, 5. Auflage*. Springer-Verlag, 2003.
- [4] A. Hammer; H. Hammer; K. Hammer. *Physikalische Formeln und Tabellen*. J. Lindauer Verlag (Schaefer), München, 1994.
- [5] E. Hecht. *Optics, Fourth Edition (International Edition)*. Addison Wesley, 2002.
- [6] T. Mayer-Kuckuk. *Atomphysik*. Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart, 1997.