Einführung in die Physik I (Mechanik) Prof. René Matzdorf

LaTeX 2ε-Umsetzung: Leonard Burtscher

17. April 2002

16.10.01

1 Lehrbücher

blabla

- Gerthsen: Physik (Springer-Verlag), kurz & bündig
- Tipler: Physik (Spektrum), mehr Text, viele Aufgaben
- Bergmann-Schäfer: Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme (deGruyter-Verlag), mehr Text
- Demtröder: Experimentalphysik 1 (Springer-Verlag), mathematischer

Bestellung z.B. über HTTP://WWW.PHYSIK.UNI-WUERZBURG.DE/BUCH.

2 Einheiten

2.1 Grundlegendes zur Messung physikalischer Größen

1. Definition einer Einheit
2. Abzählen von Vielfachen oder Vielfachen von Bruchteilen der Einheit bzw. Zurückführen auf andere Größe

Mögliche Fehler:

- äußere Einflüsse (Temperatur, Materialermüdung, ...)
- Ablesefehler
- statistische Schwankungen

2.2 Zeit: Einheit und Messung

Einheit der Zeit ist die Sekunde.

$$[t] = 1s$$

Gemessen wird die Zeit mit periodischen Vorgängen:

- astronomische Vorgänge (Rotation / Revolution der Erde...)
- Schwingungen (Quarz-Kristall!)
- inneratomare Vorgänge (Atomuhren)

Die Zeit ist die am genauesten messbare physikalische Größe. Genauigkeit ca. $10^{-14}s$, entspricht einem Fehler von einer Millionstel Sekunde pro Jahr.

Definition der Sekunde Ursprünglich: $1s = \frac{1}{86400}$ eines mittleren Sonnentages.
Schwankungen der Erdrotation setzen dieser Definition aber Grenzen in ihrer Genauigkeit (Ursache z.B. Laub der Bäume [unterschiedliche Trägheitsmomente, je nachdem ob das Laub auf den Blättern oder auf dem Boden liegt!], Versuch: Rotation auf Drehschemel mit Hanteln in den Händen; Drehbewegung wird schneller, wenn die Hände angezogen sind!).
Heutige Definition der Sekunde: Eine Sekunde ist das 9192631770-fache einer bestimmten Periodendauer des Cäsium-Atoms.
Genaue Zeitmessung war wichtig für Seefahrer, um die geographische Länge zu bestimmen.

Uhren

- **Pendeluhren:** mechanische Uhren mit Unruhe aus federgetriebenem Drehpendel
- **Quarzuhren:** Biegeschwingung eines Quarzplättchens, elektrisch angeregt durch piezoelektrische Effekte
- **Atomuhren:** Basieren auf dem Übergang verschiedener Energieniveaus (sog. Hyperfeinstrukturübergänge) bestimmter Atome; Atomuhren sind die genausten Uhren

17.10.01

Relativität der Zeit Einsteins Relativitätstheorie besagt: Zeit läuft unterschiedlich in gegeneinander bewegten und beschleunigten Systemen. Experimente zeigen, dass Uhren unterschiedliche Zeit anzeigen, wenn

- sie mit hohen Geschwindigkeiten bewegt werden oder
- eine auf dem Berg, die andere im Tal steht.

Diese Effekte betreffen alle physikalischen Experimente in diesem System! **Es gibt keine absolute Zeit!**
Beispiel: Flugzeugexperiment: Atomuhren werden mit Flugzeugen transportiert. Ein Flugzeug fliegt in Westrichtung; dadurch wird die Atomuhr auf dem Westflug etwas abgebremst, die Uhr im Ostflug jedoch zusätzlich zur Erdrotation beschleunigt. Die so im Versuch direkt messbare Zeitdifferenz ist im Bereich $10ns < \Delta t < 100ns$.

2.3 Einheit der Länge

$$[l] = m$$

Die Einheit der Länge ist das Meter.

2.4 Geschichte der Definition der Länge

Jahr	Definition des Meters
ursprünglich	$1m = \frac{1}{10000000}$ des Meridians vom Nordpol zum Äquator durch Paris
1874	Erstes angefertiges Meterstück, war ca. 0,2mm ($\widehat{=}0,2$ ‰) zu kurz wg. Fehlkalkulation der Erdabplattung
1889	Urmeter (Pt-Ir-Legierung), Beibehaltung der zu kurzen Länge, Urmeter unterliegt äußeren Einflüssen
1960	Definition des Meters über atome Größe, 1 Meter ist ein Vielfaches der Wellenlänge eines ^{86}Kr-Überganges.
1986	Definition über Naturkonstante; $c = 299792458\frac{m}{s}$ (im Vakuum).

2.5 Die Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit ist die Grundlage der Definition des Meters (siehe 2.3). Sie ist dafür ideal, da sie (nach Einstein) in allen Systemen gleich groß ist.
Die Länge wird durch die Definition der Geschwindigkeit auf eine Zeitmessung zurückgeführt. 1 Meter ist die Länge, die Licht im Vakuum in $\frac{1}{299792485} \cdot 1s$ zurücklegt.

Messung der Lichtgeschwindigkeit Beschreibung des Versuchsaufbaus: Ein Laser sendet Lichtpulse aus, die über zwei Spiegel gespiegelt werden und mit einem Detektor (auf gleicher Höhe des Laser) gemessen werden. Bei einer zweiten Anordnung sind die Spiegel um Δs weiter hinten angebracht, das heißt, das Licht muss die Strecke $2 \cdot \Delta s$ im Vergleich zum ersten Teilversuch mehr zurücklegen. Gemessen wird die Zeit Δt, die das Licht für die längere Strecke zusätzlich braucht. Die Lichtgeschwindigkeit ergibt sich dann zu: $c = \frac{2 \cdot \Delta s}{\Delta t}$. Die Messung erfolgte mit einem Oszilloskop. Ergebnis: Die so gemessene Lichtgeschwindigkeit beträgt $(3,00 \pm 0,09) \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

2.6 Längenmessung

Beispiel: Global Positioning System (GPS). Mit 24 Satelliten wird der Ort über Unterschiede in den Laufzeiten von den verschiedenen Satelliten zum Punkt des Messenden berechnet. Eine genaue Bestimmung aller drei Raumkoordinaten auf der Erde mithilfe von GPS ist erst mit mindestens vier in Funkreichweite befindlichen Satelliten möglich, da ein Satellit erst einmal die genaue Zeit übermitteln muss (sonst müsste ja jeder GPS-Empfänger eine Atomuhr enthalten!) und die anderen drei dann erst für die Berechnung der Raumkoordinaten verwendet werden können.

Die so erzielte Messgenauigkeit ist im Bereich 1 cm!

Große Längen können also durch Laufzeitmessungen von kurzen Pulsen berechnet werden. Kleine Längen werden durch Laserinterferometrie gemessen. Die Frequenz von Laserstrahlung kann mit Atomuhren mit einer Genauigkeit von ca. $10^{-14} Hz$ gemessen werden.

2.7 Laserinterferometer für Längenmessung

Ein Laser sendet Lichtpulse aus, die auf einen halbdurchlässigen Spiegel fallen, der den Lichtstrahl zum Einen nach oben auf einen fest angebrachten Spiegel lenkt und zum anderen durchlässt zu einem weiteren Spiegel, dessen Position verstellbar ist. Das reflektierte Licht beider Spiegel fällt schließlich auf einen Schirm, auf dem Interferenz beobachtbar ist: Wenn die beiden letztgenannten Spiegel beide gleich weit vom halbdurchlässigen Spiegel entfernt sind oder um jeweils ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge des Lasers unterschiedliche Entfernung haben, wird der erste Lichtstrahl durch den zweiten verstärkt und es kommt zu einer Verstärkung des Signals. Bei anderen Spiegelpositionen wird das Licht aber ganz oder teilweise ausgelöscht (Interferenz). Durch Zählen der Maximum-Minimum-Übergänge auf dem Schirm kann die Strecke s, um die der bewegliche Spiegel verstellt wird, sehr genau gemessen werden.

2.8 Praktische Längenmessung

Messinstrument	Genauigkeit
Zentimetermaß	$\pm 1mm$
Schieblehre	$\pm 0,1mm$
Mikrometerschraube	$\pm 10\mu m$
Elektronische Messung	$\pm 0,1\mu m$

3 Masse, Beschleunigung und Kraft

3.1 Masse

$$[m] = 1kg$$

Die Einheit der Masse ist das Kilogramm.

Definiert ist das Kilogramm seit 1889 über den Prototyp des Kilogramms, das sog. Ur-Kilogramm, welche in Paris aufbewahrt wird. Das Kilogramm ist die einzige Einheit, die noch durch einen Prototypen dargestellt wird. Der Prototyp besteht aus einer $Pt - Ir$-Legierung $(90\%Pt, 10\%Ir)$.

Das Problem bei Prototypen ist, dass sie äußeren Einflüssen unterliegen. So verändert das Ur-Kilogramm im Laufe der Zeit seine Masse...

3.1.1 Zur Geschichte des Kilogramms

Zeit	Definition
Ursprünglich...	...wurde das Kilogramm auf das Meter zurückgeführt.
Vor 1889	1 kg war die Masse die $1dm^3$ Wasser bei $4C$ (Dichtemaximum des Wassers) besitzt.
Heute	Versuch der Zurückführung auf die Atommasse des Kohlenstoffisotops ^{12}C $m_A : 12g = N_A \cdot m_{^{12}C}.N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23} \cdot mol^{-1}$, Genauigkeit: 10^{-9}.

3.1.2 Bewegung von Massen

- Galileo Galilei (1564-1642): **Trägheitsprinzip** (Ruhe als Spezialfall mit $v = 0$)
- Isaac Newton (1643-1727): $F = m \cdot a$: **Aktionsprinzip** (Axiom!)

Die Newton'schen Axiome widersprechen der Alltagserfahrung (die ja äußeren Einflüssen wie Reibung, Schwerkraft, Temperatur, ... unterlieg. Sie sind eine herausragende Leistung der Abstraktion zur damaligen Zeit!
N.b.: Geradlinig gleichförmig = gerade Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

3.2 Beschleunigung

$$a = \dot{v}$$

Die Beschleunigung a ist die Änderung der Geschwindigkeit v.

Die Analysis entstand parallel zur Physik, um physikalische Phänomene zu beschreiben.

$$a = \frac{v}{t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

falls $a = const.$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

(Allgemeine Definition)

$$v = \dot{x}, a = \dot{v} \Rightarrow a = \ddot{x}$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

3.3 Kraft

$$[F] = N$$

Die Einheit der Kraft ist das Newton.

Die Definition der Einheit der Kraft leitet sich aus Newtons Aktionsprinzip ab:

$$F = m \cdot a$$

$$[F] = 1kg \cdot \frac{m}{s^2} = 1N$$

1 Newton ist die Kraft, die eine Masse von 1 kg mit $1\frac{m}{s^2}$ beschleunigt.

In dieser Gleichung kommt keine Proportionalitätskonstante vor (definitionsgemäß...). Die Messung wird auf eine Messung von Masse, Länge und Zeit zurückgeführt.
Versuch mit Ergebnis $F \propto m$ und $F \propto a$ bzw. $a \propto \frac{1}{m}$.
3. Newton'sches Axiom:

$$\vec{F} = -\vec{F}$$

Wenn $\vec{F}$ ihren Ursprung in einer anderen Masse hat, dann wirkt $-\vec{F}$ auf diese andere Masse. Das 3. Newton'sche Axiom wird auch **Reaktionsprinzip** genannt.
Versuch (1): Zwei gleich große Massen mit gleichnamigen magnetischen Polen auf der der anderen Masse zugewandten Seite auf Luftkissenschiene mit Faden verbunden. Nach Durchtrennung des Fadens werden beide in gleichem Maße voneinander weg beschleunigt („Die eine Masse stösst sich an der anderen ab.“).
Versuch (2): Durchbiegung eine Brettes. Aufbau: Ein dünnes Brett wird auf zwei Ziegelsteine gelegt, so dass es in der Mitte frei in der Luft hängt. Wird nun eine Masse auf die Mitte des Brettes gestellt, biegt sich das Brett solange weiter durch, bis die Spannkraft des Brettes (betragsmäßig) gleich der Gewichtskraft der darauf gestellten Masse ist.

3.3.1 Gravitation

Beobachtung: Massen ziehen sich gegenseitig an. Gravitationsgesetz kann aus astronomischen Beobachtungen der Planetenbewegungen abgeleitet werden. Tycho Brahe (16. Jahrhundert) sammelte Daten von den Planetenbahnen, die Johannes Kepler (16./17. Jahrhundert) auswertete und zu den bekannten drei **Kepler'schen Gesetzen** formte:

1. Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht

2. Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

3. Das Quadrat der Umlaufzeiten eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Ableitung des Gravitationsgesetzes aus Keplers Gesetzen:

$$F_Z = m\frac{v^2}{r} \tag{1}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{2}$$

(2) in (1) ergibt:

$$F_Z = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}$$

Aus Newtons Reaktionsprinzip folgt: Es muss eine Gegenkraft geben:

$$|\vec{F}_G| = -|\vec{F}_Z|$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Leftrightarrow \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} = const.$$

Mit $|\vec{F}_G| = -|\vec{F}_Z| \Leftrightarrow |\vec{F}_Z| = -|\vec{F}_G|$ ergibt sich:

$$F_Z = \frac{4\pi^2 rm}{T^2} \qquad \Big| \cdot \frac{r^2}{m}$$

$$\frac{-F_G r^2}{m} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = const.$$

Und nach Umstellung:

$$F_G = -\frac{m \cdot const.}{r^2}$$

Aufgrund des Reaktionsprinzips muss die Gravitationskraft auch proportional zur zweiten beteiligen Masse (im Falle des Sonnensystems die Sonnenmasse) sein:

$$F_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

γ ist die Gravitationskonstante

Newtons Überlegungen zur quadratischen Abhängigkeit: Mond wird mit $a = \frac{v^2}{r} = 0,00273 \frac{m}{s^2}$ beschleunigt. Erdradius : Radius der Mondbahn um die Erde $\approx 1 : 60$; Die Beschleunigung der Erde in Entfernung Mondradius verhält sich zu der auf der Erde wie $1 : 3600$. Daraus schloss Newton:

$$F \propto \frac{1}{r^2}.$$

3.3.2 Messung der Gravitationskonstante γ

An der Erdoberfläche wirkt auf eine Probemasse m die Kraft

$$F_G = -\gamma \frac{m \cdot m_{Erde}}{r^2}$$

Der Erdradius ist direkt messbar, die Erdmasse nicht. Aus der Kraftmessung kann daher nur $\gamma \cdot m_{Erde}$ bestimmt werden. Die Gravitationskonstante ist nur messbar, wenn beide beteiligten Massen separat ausgemessen werden können. Sie ist die am ungenauesten bekannte Naturkonstante:

$$\gamma = (6,673 \pm 0,01) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$$

Versuch: Messung der Gravitationskonstante nach Cavendish-Eötvös. (siehe Tipler, S. 309)

3.3.3 Messung der Schwerebeschleunigung (Ortsfaktor) der Erde

$$F_g = \gamma \frac{m m_{Erde}}{r^2} = m \cdot a$$

Die Probemasse m kürzt sich heraus, d.h. alle Massen fallen gleich schnell.

Versuch (nach Galileo): Gleichzeitiges Fallenlassen einer Feder und einer Bleikugel in einem evakuierten Glaszylinder: beide Körper fallen gleich schnell.
Voraussetzung für diese Rechnungen ist: Träge Masse = Schwere Masse, d.h. die Trägheit einer Masse ist gleich ihrer „Schwerheit“(ist ja nicht selbstverständlich!).

Präzisionsmessung mit Gravimeter: Absolutbestimmung von g mit Fallversuch. Ortsmessung $x(t)$ mit Laserinterferometer / „Abzählen“. Es ergeben sich unterschiedliche Werte für g je nach Standpunkt auf der Erdoberfläche, denn g hängt ab von der Erdabplattung, der Zentrifugalkraft (am Äquator größer!), von Ebbe / Flut, von geologischen Gegebenheiten..., letztlich zu jeder Masse! Einige Beispiele:

Ort	g$[m/s^2]$
Hamburg	9,814
Hannover	9,813
München	9,807
Rom	9,803

Anwendungen für genaue Messung des Ortsfaktors:

- Suche nach Öl (Ölblase hat geringere Masse als Gestein)
- Erforschung von Magmafluss in Vulkanen

Relative Gravimeter: Funktionieren mit supraleitender Spule und einer darauf schwebenden Kugel, die den Abstand zu einer darüber angebrachten Platte je nach äußeren Bedingungen (s.u.) verändert. Der Abstand zwischen Kugel und Platte wird über kapazitive Abstandsmessung gemessen. Die äußeren Faktoren, die damit recht genau gemessen werden können sind z.B. Mondphasen, Luftdruck und sogar die Präzession der Erde (Präzession = „Taumelbewegung“ um die eigene Achse)!

4 Mehrdimensionale Bewegungen

Ort, Geschwindigkeit usw. müssen vektoriell angegeben werden:

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = r_x \cdot \vec{e}_x + r_y \cdot \vec{e}_y + r_z \cdot \vec{e}_z$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind Einheitsvektoren.

4.1 Geschwindigkeit

Geschwindigkeit in 1D:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}x(t)$$

In drei Dimensionen:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) = \left(\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}, \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}, \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\right) = \vec{v}_x \cdot \vec{e}_x + \vec{v}_y \cdot \vec{e}_y + \vec{v}_z \cdot \vec{e}_z$$

4.2 Beschleunigung

Beschleunigung in 1D:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(t)$$

In drei Dimensionen:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\Big(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\Big) = \left(\underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x}, \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y}, \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{a_z}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \vec{a}_x \cdot \vec{e}_x + \vec{a}_y \cdot \vec{e}_y + \vec{a}_z \cdot \vec{e}_z$$

4.3 Kraft

Kraft in 1D:

$$F = m \cdot a$$

wobei die Kraft in Richtung der Beschleunigung wirkt und die Masse konstant ist. In drei Dimensionen:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \underbrace{m\vec{a}_x \cdot \vec{e}_x}_{F_x} + \underbrace{m\vec{a}_y \cdot \vec{e}_y}_{F_y} + \underbrace{m\vec{a}_z \cdot \vec{e}_z}_{F_z}$$

Die Bewegungen in die drei Raumrichtungen sind voneinander unabhängig. Beispiel für zwei voneinander unabhängige Geschwindigkeiten: schräger Wurf (ohne Reibung). Die Wurfparabel berechnet sich hierbei folgendermaßen:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$v_x(t) = v_0, \quad v_y(t) = v_{0_z} - gt, \quad v_z(t) = 0$$

25.10.01

4.3.1 Addition von Kräften

Körper verharrt in Ruhe, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

An dem Körper wirkt die Kraft $\vec{F}_{Res}$, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_{Res} = m \cdot \vec{a}$$

4.3.2 Kraftfelder

Die Kraft auf eine Masse kann an verschiedenen Orten unterschiedlich sein. Daher wird für jeden Ort $\vec{r}(x, y, z)$ der Kraftvektor $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ angegeben. Diese Funktion der Kraft in Abhängigkeit des Ortes wird **Kraftfeld** genannt.

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

Kraftfelder sind etwas Reales. In einem Gravitationsfeld oder auch in einem elektrischen Feld (beides Beispiele für Kraftfelder) ist Energie gespeichert! Mit dem Aktionsprinzip kann man die Beschleunigung einer Masse an jedem Ort $\vec{r}$ in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ direkt berechnen. Das Gravitationsfeld ist ein radialsymmetrisches Kraftfeld.

$$F_G = -\gamma \frac{mM}{r^2}$$

bzw. vektoriell:

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM\vec{r}}{|\vec{r}|^2\,|\vec{r}|} = -\gamma \frac{mM\vec{r}}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

mit

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Kraftfelder können auch zeitabhängig sein:

$$\vec{F}(\vec{r}, t)$$

Man kann kein Kraftfeld definieren, wenn die Kräfte auch von der Geschwindigkeit der Masse abhängen (wie bei der Zentripetalkraft):

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

hängt explizit von der momentanen Bewegung der Masse ab und kann daher (definitionsgemäß) kein Kraftfeld sein. $\vec{a}$ ist kein Feld, da es keine Energie enthält.

4.3.3 Feldstärke

Um das Kraftfeld von der Probemasse unabhängig darstellen zu können, führt man den Begriff der **Feldstärke** ein:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

Wegen „Träge Masse = Schwere Masse“ ist die Feldstärke des Gravitationsfeldes eine Beschleunigung (Schwerebeschleunigung).
Denn:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r})$$
$$m\vec{a} = m\vec{g}(\vec{r})$$
$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{a}$$

4.3.4 Graphische Darstellung von Feldern, Feldlinien

Gravitationsfeld: Jede Feldlinie beginnt im Unendlichen und endet in einer Masse. Richtung der Feldlinie entspricht der Richtung der Kraft an einem Punkt auf eine Probemasse. Die Anzahl der Feldlinien pro Flächeneinheit (Dichte der Feldlinien) ist proportional zum Betrag der Kraft an einem bestimmten Ort bei senkrechtem Durchstoßen durch die Zeichenebene.
Unter **Äquipotentiallinien** versteht man Linien gleichen Potentials, an denen entlang (bei vernachlässigter Reibung) Massen also kräftefrei bewegt werden können. 26.10.01

4.4 Beschreibung und Vorhersage der Bewegungen von Massen

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}(\vec{r})$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ ergibt sich

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

Diese Differentialgleichung hat als Lösung Funktionen $\vec{r}(t)$.

Lösungen sind alle möglichen Bewegungen in dem Kraftfeld, d.h. alle zulässigen Funktionen $\vec{r}(t)$. Erst durch die Angabe von Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit beschränkt man die Lösung auf eine bestimmte Bewegung.

Beschreibung des Experiments mittels eines Modells:

- Zusammenstellen aller Kräfte die auf die bewegliche Masse wirken
- Aufstellen der Bewegungsgleichung
- Lösen der Bewegungsgleichung
- Feststellen der Anfangsbedingungen
- Berechnung der Bahnkurven zu diesen Anfangsbedingungen
- Vergleich mit dem Experiment
- Bestätigung bzw. Korrektur des Modells

Genauer: Relativistische Beschreibung der Bewegungen.

Die Bewegungsgleichung, d.h. die Differentialgleichung kann numerisch oder in bestimmten Fällen analytisch gelöst werden.

Einfache numerische Lösung:

Ausgehend vom Startpunkt $\vec{r_0}$ mit Startgeschwindigkeit $\vec{v_0}$ wird in jedem Moment folgendes berechnet:

- Aus der Kraft $\vec{F}$ die Beschleunigung $\vec{a}$ = Änderung der Geschwindigkeit $\vec{v}$.
- Daraus die neue Geschwindigkeit $\vec{v}$ = Änderung des Ortsvektors $\vec{x}$
- Daraus schließlich der neue Ort

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v} \cdot \Delta t$$

Das heißt:

$$\vec{r}_{neu} = \vec{r}_{alt} + \vec{v}_{alt} \cdot \Delta t$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a} \cdot \Delta t$$

Das heißt:

$$\vec{v}_{neu} = \vec{v}_{alt} + \vec{a}_{alt} \cdot \Delta t$$

Die Beschleunigung berechnet sich aus der Kraft, also:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v} + \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} \cdot \Delta t,$$

Das heißt:

$$\vec{v}_{neu} = \vec{v}_{alt} + \frac{\vec{F}(\vec{r}_{alt})}{m} \cdot \Delta t$$

Überprüfung der Kepler'schen Gesetze, d.h. Überprüfung des Modells anhand der Naturbeobachtung mittels numerischer Methoden:

1. Die Bahnkurven sind Ellipsen in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (nicht gezeigt)
2. Flächensatz (nicht gezeigt)
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen. Numerische Genauigkeit: Modell und numerische Lösung stimmen auf 10^{-4} überein!
   Versuch: Variation des Exponenten:
   $$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_s \cdot m_E}{r^{2,01}} \frac{\vec{r}}{r}$$
   Ergebnis: Die Bahnkurven sind keine Ellipsen mehr, sondern Rosettenbahnen. Tatsächlich ist die Bahn des Merkur eine Rosettenbahn aufgrund von Effekten der Allgemeinen Relativitätstheorie und anderer Bahnstörungen

30.10.01

4.4.1 Grenzen unseres Modells zur Beschreibung der Bewegung von Massen

Nano-Kosmos
Bewegt sich eine kleine Masse auf einer „Keplerbahn “mit Radius im nm-Bereich, dann gilt unser Modell nicht mehr.

1. Die Anfangsbedingungen der Bewegung sind nicht präzise bestimmbar. Sie sind nur mit einer Unschärfe $x = x_0 \pm \Delta x$ und $v = v_0 \pm \Delta v$ bekannt. Es gilt:
   $$\Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{m} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{m} \cdot \frac{kg\frac{m^2}{s}}{kg}$$
   Diese Unschärfe gibt die Natur vor, sie kann mit keinem Experiment überwunden werden. Darstellung des vermutlichen Aufenhaltsortes des Teilchens als Wahrscheinlichkeitsfunktion $|\Psi^2|$. Teilchen innerhalb dieser Unschärfe haben unterschiedliche Umlaufzeiten. Eine anfängliche lokal begrenzte Verteilung verbreitert sich im Laufe der Zeit. Nach mehreren Umläufen ist die Verteilung über die ganze Bahn verschmiert. Man weiß nicht mehr, wo „auf der Bahn“ das Teilchen ist.

2. Zusätzlich haben die „Teilchen“ eine Wellennatur und Überlagerungen führen zu Interferenzen wie man sie vom Licht her kennt. Überlagert sich das Teilchen mit sich selbst, d.h. sein n-ter Umlauf mit seinem $(n + 1)$-ten Umlauf, dann beobachtet man eine Wellenstruktur in der Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Dies alles wird in der Quantenmechanik mathematisch formuliert

Die Newton'schen Mechanik, die im Alltag durchaus korrekte Werte liefert, ist der Spezialfall für allgemeinere Modelle, nämlich:

- Die Quantenmechanik im Kleinen und
- die Relativitätstheorie im Großen.

4.4.2 Richtige Behandlung der Gegenkraft

Auf die Sonne wirkt die gleiche Kraft wie auf die Erde, aber in entgegengesetzter Richtung. Auch die Sonne wird beschleunigt. Behandlung der Sonne als frei bewegliche Masse durch zusätzliche Bewegungsgleichungen. Erde bewegt sich im Kraftfeld der Sonne, Sonne bewegt sich im Kraftfeld der Erde.

$$\ddot{\vec{r_e}} = -\gamma \frac{m_s}{|\vec{r_e} - \vec{r_s}|^2} \frac{\vec{r_e} - \vec{r_s}}{|\vec{r_e} - \vec{r_s}|}$$

$$\ddot{\vec{r_s}} = -\gamma \frac{m_e}{|\vec{r_s} - \vec{r_e}|^2} \frac{\vec{r_s} - \vec{r_e}}{|\vec{r_s} - \vec{r_e}|}$$

4.4.3 Analytische Behandlung von kreisförmigen Planetenbahnen:

Wichtige Methode beim Lösen von Differentialgleichungen: „Intelligentes Raten“ der richtigen Funktion und anschließend Berechnung der Parameter. Bahnkurve ist ein Kreis, also

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

Bewegung auf Kreis ist gleichförmig (Keplers Flächensatz), Winkel nimmt gleichmäßig zu, $\phi = \omega t, \omega = const.$

$$\vec{r} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-\omega r \sin \omega t, \omega r \cos \omega t)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (-\omega^2 r \cos \omega t, -\omega^2 r \sin \omega t)$$

Nach Ausklammern von $-\omega^2$ ergibt sich:

$$\vec{a} = -\omega^2 (r \cos \omega t, r \sin \omega t) = -\omega^2 \vec{r}$$

Die Beschleunigung zeigt immer auf das Zentrum des Kreises, sie heißt **Zentripetalbeschleunigung**.

$$a = -\omega^2 r$$

Bewegungen auf einer Kreisbahn sind immer beschleunigte Bewegungen. Die Zentripetalbeschleunigung steht senkrecht zu $\vec{v}$, sie ändert nicht Betrag von $\vec{v}$, nur ihre Richtung.

Die Zentripetalbeschleunigung muss durch eine Kraft verursacht werden (Aktionsprinzip):

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r})$$

mit m_1 im Zentrum und m_2 auf der Kreisbahn ergibt sich:

$$-m_2\omega^2\vec{r} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \gamma\frac{m_1}{r^3}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\gamma\frac{m_1}{r^3}}$$

Ein Umlauf, d.h.: $\phi = 2\pi$ wird nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}T$ erreicht, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ nennt man **Winkelgeschwindigkeit**. Aus

$$\omega^2 = \gamma\frac{m_1}{r^3}$$

liest man sofort wieder das 3. Kepler'sche Gesetz ab:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \gamma\frac{m_1}{r^3} \Leftrightarrow \frac{r^3}{T^2} = \gamma\frac{m_1}{4\pi^2} = const.$$

Der Betrag der Bahngeschwindigkeit $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r \underbrace{\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}}_{=1}$$

also:

$$v = r\omega$$

Analytische Behandlung von Ellipsen schwieriger. Analytische Behandlung einer Rosettenbahn sehr schwierig.

4.5 Arbeit, Energie, Impuls und Erhaltungssätze

31.10.01

Beispiele:

- Arbeit wird verrichtet wenn eine Masse angehoben wird: „Steine auf den Berg schleppen ist anstrengend".
- Arbeit wird aber nicht verrichtet beim Erzeugen der Gegenkraft zur Gewichtskraft, d.h. beim Halten der Masse.
- Entgegen Alltagserfahrung: „Steine im Arm halten ist auch anstrengend". Man kann die Steine auch auf einen Tisch legen, der die Gegenkraft erzeugt. Der Tisch verrichtet dabei keine Arbeit, sondern es wirken nur Kräfte.
- Arbeit wird verrichtet, wenn man eine Masse gegen einer Kraft verschiebt. Keine Arbeit wird verrichtet bei waagerechtem (reibungslosen) Verschieben auf einer Luftkissenschiene, weil keine Kraft in diese Richtung wirkt.
- Beim Verschieben der Steine auf dem Tisch wird Arbeit verrichtet, da die Verschiebung gegen die Reibungskraft verläuft.

Zum Anheben der Masse hat man viele Möglichkeiten: z.B. Flaschenzug, aber: Goldene Regel der Mechanik: $\vec{F}\cdot\vec{s} = const.$ Das Produkt aus Kraft und Weg ist immer gleich, nämlich die mechanische Arbeit.

4.5.1 Definition der Arbeit

Ortsunabhängige Kräfte:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

Die Arbeit ist eine skalare Größe. Sie wird aus zwei Vektoren berechnet (Skalarprodukt). Das Skalararprodukt berücksichtigt nur die Komponente des einen Vektors, die in die Richtung des anderen Vektors zeigt und multipliziert diese mit dem Betrag des anderen Vektors.

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = \left| \vec{F_{\|}} \right| \cdot |\vec{s}|$$

$\vec{F_{\perp}}$ trägt nicht zur Arbeit bei.

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = \left| \vec{F} \right| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (s_x, s_y, s_z) = (F_x s_x, F_y s_y, F_z s_z)$$

Ortsabhängige Kräfte: Krummlinige Verschiebung in einem Kraftfeld. Die Verschiebung muss in kleine Stücke zerlegt werden. Die Arbeit wird für jedes Stück berechnet und aufsummiert.

$$W = \sum_{i=0}^{n} \vec{F_i} \cdot \Delta \vec{s}$$

Grenzübergang $\Delta s \to 0$ liefert Integral:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Integration von einem Startpunkt $\vec{r}_1$ entlang einer Kurve zu einem Endpunkt $\vec{r}_2$ (Riemann'sches Linienintegral).

4.5.2 Wegabängigkeit der Arbeit

Beispiel: Schiefe Ebene mit Reibung. Die verrichtete Arbeit ist wegabhängig. Arbeit wird in Reibungswärme umgewandelt und liegt nicht mehr als mechanische Energie vor.

4.5.3 Konservatives Kraftfeld

Beispiel: Schiefe Ebene ohne Reibung (konstante Kraft). Wenn die verrichtete Arbeit unabhängig vom Verlauf des Weges zwischen zwei beliebigen Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist, nennt man das Kraftfeld **konservativ**.

Hier zählt nur die Aufwärtskomponente des Weges, d.h. die Komponente der Verschiebung in Richtung der Kraft.

Äquivalente Definition: Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn die verrichtete Arbeit entlang jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Konservatives Kraftfeld

Anschaulich ist auch die folgende äquivalente Formulierung: Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn in jedem Punkt die Wirbelstärke gleich Null ist. (Die Wirbelstärke wird mit dem mathematischen Operator $rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ berechnet.) In einem Wirbelfeld (nicht konservativem Kraftfeld) wird auf einer geschlossenen Bahn Arbeit verrichtet. Das Gravitationsfeld ist ein konservatives Kraftfeld. In einem konservativen Kraftfeld kann man eine potentielle Energie definieren: Bezüglich eines Referenzpunktes $\vec{r}_{Ref}$ hat eine Masse m im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ die potentielle Energie:

$$E_{pot}(\vec{r}) = W(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}_{Ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Beim Gravitationsfeld wählt man den Referenzpunkt im Unendlichen und berechnet den direkten Weg:

$$E_G(\vec{r}) = \int\limits_{\infty}^{\vec{r}} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|} d\vec{r'}$$

$$E_G(\vec{r}) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

4.5.4 Potential

Man kann die Gleichung für die potentielle Energie durch die Probemasse teilen und analog vorgehen:

$$\phi(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}_{Ref}}^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

analog zu

$$E_{pot}(\vec{r}) = W(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}_{Ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_2}{r}$$

analog zu

$$E_G(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

ϕ ist das Gravitationspotential.

Potentielle Energie und Potential haben den Vorteil, dass sie skalare Größen sind. Skalare Felder: $E_{pot}(x, y, z)$ bzw. $\phi(x, y, z)$. Trotzdem kann man die Kraft bzw. die Feldstärke wieder aus ihnen berechnen.

Das Gesamtpotential von mehreren Einzelmassen ist die Summe der Einzelpotentiale (Superpositionsprinzip).

Superpositionsprinzip = Aufeinanderlegen und Aufaddieren. 02.11.01

4.5.5 Potentielle Energie

Voraussetzung: konservatives Kraftfeld. Verrichtete Arbeit hängt nur von Startpunkt $\vec{r}_1$ und Endpunkt $\vec{r}_2$ ab, nicht vom Wegverlauf dazwischen.

Arbeit:

$$W = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{s} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} dr'$$

$$E_{pot} = -Arbeit = +$$

–

Beispiel: Potentielle Energie im Gravitationsfeld einer Punktmasse (Ort der Masse am Nullpunnkt des Koordinatensystems)

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Kompensationskraft:

$$\vec{F}_K(\vec{r}) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Potentielle Energie bzgl. Referenzpunkt im Unendlichen

$$E_{pot}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}} \left(\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r'}}{r'} \right) dr'$$

Wahl eines bestimmten Weges: direkter Weg entlang des Radiusvektors:

$$E_{pot}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}} \left(\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r'}}{r'} \right) dr'$$

Der Verschiebungsvektor $d\vec{r'}$ zeigt in $-\vec{r'}$ Richtung. Also gilt für das Skalarprodukt:
Umschreiben des Integrals in ein Integral über skalare Größen:

$$E_{pot}(r) = \int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}} \left(\gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r'}}{r'} \right) (-dr')$$

Man erhält: Konstanten vor's Integral gezogen
Berechnung des Integrals: ...

$$E_pot(r) = \gamma m_1 m_2 [-\frac{1}{r}]_\infty^r = -\gamma m_1 m_2 1/r - () = ... - 0$$

Ergebnis: Potentielle Energie im Gravitationsfeld:

$$E_{pot}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

WICHTIG: Entweder - Integral Grav.kraft oder + Integral Kompensationskraft!!!

4.5.6 Berechnung der Kraft aus dem Feld der potentiellen Energie

$$\vec{F} = -gradE_{pot}(\vec{r})$$

analog Berechnung der Feldstärke aus dem Potential:

$$\vec{g} = -grad\phi(\vec{r})$$

Gradient in kartesischen Koordinaten:

$$grad\phi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

Der Gradient gibt Richtung und Betrag der Steigung eines skalaren Feldes an.
Vorstellung: Potentielle Energie = Berglandschaft, Gradient zeigt bergauf, Kraft wirkt bergab =

$$-gradE_{pot}(\vec{r})$$

4.5.7 Potentielle Energie an der Erdoberfläche im Alltag

$$E_{pot}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F}_G \cdot d\vec{s}$$

$\vec{r}_{ref}$ = Fußboden (Referenzhöhe)
Die Kraft ist in guter Näherung konstant = mg und wirkt immer senkrecht.

$$E_{pot}(h) = mgh$$

h vom Fußboden aus gemessen ($h \ll r_{Erde}$).
Einheit der Energie und der Arbeit: 1 Joule = 1 Newton · 1 Meter

$$1J = 1Nm = 1kg\frac{m^2}{s^2}$$

Die Einheit Joule kann auf die bekannten Einheiten zurückgeführt werden.
Potentielle Energie kann in kinetische Energie umgewandelt werden.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

Eine Masse in einem konservativen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ bewege sich mit der Geschwindigkeit v(r) (VEK!). Sie wird durch die Kraft beschleunigt:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r})$$

In dem kleinen Zeitintervall Δt legt sie den Weg $\Delta\vec{s} = \vec{v}\Delta t$ zurück. Das Kraftfeld verrichtet die Arbeit:

$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r})\Delta\vec{s} = \vec{F}(\vec{r})\vec{v}\Delta\vec{t} = m\vec{a}\vec{v}\Delta t = m\Delta\vec{v}\vec{v}$$

an der Masse. Die kinetische Energie ändert sich dabei um

$$E_{kin} + \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m|\vec{v} + \Delta\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + m\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} + \underbrace{1/2m|\Delta\vec{v}|^2}_{sehrklein!}$$

Um den gleichen Wert hat die potentielle Energie abgenommen:

$$E_{pot}(\vec{r} + \Delta\vec{s}) = E_{pot}(\vec{r}) - \Delta W$$

beide Energieformen können ineinander umgewandelt werden. In konservativen Kraftfeldern gilt somit die Erhaltung der Summe

$$E = E_{pot} + E_{kin}$$

Energieerhaltungssatz (der Mechanik).

Potentielle Energie kann auch in einer elastischen Verformung stecken.

Versuch: Fadenpendel:

$$E_{pot} \to E_{kin} \to E_{pot} \to \dots$$

Der Energiesatz ist praktisch um z.B. den Betrag der Geschwindigkeit zu berechnen, ohne die genaue Bahnkurve berechnen zu müssen.

Beispiel: freier Fall vs. Pendel (jeweils Fall um Höhe h, beiden haben gleiche Geschwindigkeit)

In beiden Fällen erhält man aus dem Energiesatz den gleichen Wert $|\vec{v}|$.

Beim Fadenpendel wirken zusätzliche Kräfte (Fadenspannung), die die Richtung von $\vec{v}$ ändern, aber keine Arbeit verrichten. Die Fadenspannung steht immer senkrecht zu $\vec{v}$ und damit auch zum Weg $\Delta\vec{s} = \vec{v}\Delta t$. 06.11.01

Kraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Feldstärke:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Potentielle Energie:

Beispiel: Planetenbewegung

$$E = E_{pot} + E_{kin} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}|^2$$

Bei Kreisbewegungen bleibt r konstant, daraus folgt: E_{pot} ist konstant –¿ E_{kin} ist konstant –¿ $|\vec{v}|$ ist konstant.

Bei elliptischen Bahnen wird E_{pot} und E_{kin} ineinander umgewandelt.

Allgemein: Erhaltung der Energie ist von grundlegender Bedeutung in der Physik.

Auch wenn das Kraftfeld nicht konservativ ist, geht keine Energie verloren. Reibungskräfte z.B. wandeln kinetische Energie in Wärmeenergie um. Energie kann z.B. auch als Strahlung transportiert werden. (Energie im elektromagnetischen Strahlungsfeld). Außerdem: Elektrische Energie, Kernenergie etc.

Die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System bleibt erhalten. Die Gesamtenergie ändert sich, wenn von außen Energie zu(ab)geführt wird. Die Energiebilanz stimmt nicht, wenn nicht alle Energieformen betrachtet werden.

Der Begriff „Energieverbrauch“im Alltag bedeutet, dass Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird und aus thermodynamischen Gründen keine Rückumwandlung möglich ist.

Massenerhaltung

In einem abgeschlossenen System bleibt die Masse erhalten.

Anmerkungen zur Relativitätstheorie: Die Relativitätstheorie verknüpft beide Erhaltungssätze durch den Zusammenhang

$$E = mc^2$$

Energie und Masse können ineinander umgewandelt werden. Speicherung der kinetischen Energie im bewegten Körper erfolgt als Masse.

$$E_{Ges} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + E_{kin} = mc^2$$

Beispiele:

- Massenzunahme eines Sprinters: $5 \cdot 10^{-14} kg$.
- Kinetische Energie der Erde entspricht: $3 \cdot 10^{16} kg$.

Die vergrößerte Masse unterliegt nun der Trägheit.

Das Gravitationsfeld ist keine Hilfsgröße zur Berechnung der Kraft, sondern ist wirklich im Raum präsent.

Es hat eine Energiedichte:

$$\frac{E}{V} = -\frac{|\vec{g}|^2}{8\pi\gamma}$$

Die potentielle Energie einer Masse ist in der Feldenergie gespeichert!!

Die Feldenergie des Massensystems ist einer Masse proportional $E = mc^2$ die wiederum Gravitation verursacht.

Dieser Effekt erklärt die Periheldrehung des Merkur (Rosettenbahn).

4.6 Impuls

Suche nach einer gerichteten (vektoriellen) Erhaltungsgröße in einem abgeschlossenen System (ohne äußere Kräfte).

Versuch Luftkissenschiene (2 Wagen prallen aufeinander, $m_1 = m_2$): Gesamtgeschwindigkeit bleibt erhalten.

Regelfall: Die Gesamtgeschwindigkeit wird **nicht** erhalten. Aber für die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten gilt:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = const.$$

Das Produkt

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

nennt man **Impuls**. Der Impuls ist ein Vektor.

Die Impulserhaltung ist wie die Energieerhaltung grundlegend in der Physik.

Die vektorielle Summe aller Impulse in einem abgeschlossenen System wird erhalten:

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i m_i\vec{v}_i = const.}$$

Energie- und Impulserhaltungssatz sind ideal, um Aussagen über den Bewegungszustand nach einer Wechselwirkung zu machen, ohne die Bahnen der Massen während der Wechselwirkung zu kennen.

Die Impulserhaltung ist die direkte Folge des Newton'schen Reaktionsprinzips und des Aktionsprinzips:

Wenn die Kraft $\vec{F}$ die auf die Masse m_1 wirkt, ihren Ursprung in der Masse m_2 hat, so wirkt auf diese die entgegengesetzte gleiche Kraft $-\vec{F}$. (Reaktionsprinzip)

Die Kraft $\vec{F}$ beschleunigt m_1 und die Kraft $-\vec{F}$ beschleunigt m_2.

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1}, \vec{a}_2 = -\frac{\vec{F}}{m_2}$$

(Aktionsprinzip)

Nach dem kurzen Zeitintervall Δt haben die Massen die Geschwindigkeiten:

$$\vec{v}_1 + \vec{a}_1 \Delta t = \vec{v}_1 + \frac{\vec{F}}{m_1}\Delta t$$

$$\vec{v}_2 + \vec{a}_2 \Delta t = \vec{v}_2 + \frac{\vec{F}}{m_2}\Delta t$$

also gilt:

$$m_1\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t + m_2\vec{v}_2 - \vec{F}\Delta t = const.$$

Verallgemeinerte Form des Newton'schen Aktionsprinzips
Eine Kraft auf eine Masse verursacht eine Impulsänderung:
Nach der Zeit Δt ist der Impuls

$$\vec{p} + \Delta\vec{p} = m\vec{v} + m\Delta\vec{v} = m\vec{v} + m\vec{a}\Delta t = m\vec{v} + \vec{F}\Delta t$$

also

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Das verallgemeinerte Aktionsprinzip lautet:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Mit der Produktregel erhält man:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Der zweite Term ist der bekannte Term $m\vec{a}$.
Normalerweise ist die Masse konstant (zeitunabhängig) und damit der erste Term gleich Null.
Relativistisch nimmt die Masse mit der Geschwindigkeit zu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Der relativistische Impuls lautet

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$$

Die zur Beschleunigung notwendige Kraft ist

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{d|\vec{v}|}\frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

In der Newton'schen Mechanik taucht der zusätzliche Term praktisch nicht auf.
Gedankenexperiment: Zwei Körper mit m_1, m_2, Geschwindigkeit v, ein Teil der Masse m_1 geht auf m_2 über.
Die Massen der beiden Körper ändern sich, also

$$\frac{dm}{dt}\vec{v} \neq 0$$

Trotzdem wirkt nirgend eine Kraft (geradlinig gleichförmige Bewegung). Richtig rechnet man mit drei Körpern, deren Masse konstant ist!

$$\frac{dm}{dt}\vec{v} = 0$$

Der dritte Körper trägt selbst auch Impuls mit sich, der den Impulsübertrag erklärt.

Gedankenexperiment (2): Radfahrer im Mückenschwarm

Die Mücken bleiben am Radfahrer kleben. Die Masse des Radfahrers erhöht sich um dm pro Zeitintervall dt. Die Kraft zur Beschleunigung des Radfahrers beträgt.

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Gemogelt! 1. Term ist der Impulsübertrag auf die Mücken (Beschleunigung der Mücken von 0 auf v). Geht nur weil die Mücken keinen Anfangsimpuls haben. Beispiel falsch, wenn man es in einem bewegten Koordinatensystem rechnet. 07.11.01

Versuch: Rakete

Rakete ändert ihre Masse durch den Ausstoß von Treibstoff. Berechnung im Bezugssystem Erde. Im Zeitintervall dt stößt die Rakete die Masse dm mit Relativgeschwindigkeit $\vec{u} = \vec{v}_T - \vec{v}_R$ aus. Der Impulsübertrag auf den Treibstoff ist $d\vec{p} = dm\vec{u}$. Die Kraft auf die Rakete (Gegenkraft) ist also:

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{u}$$

Sie wirkt gegen die Gewichtskraft und beschleunigt die Rakete

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}_R}{dt} - mg$$

Gleichsetzen liefert:

$$\frac{d\vec{v}_R}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\vec{u} + \vec{g}$$

Lösen der Differentialgleichung durch Integration:

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\vec{u} + \vec{g}$$

$$\vec{v}_R(t) = \int_0^t \frac{d\vec{v}_R}{dt'}dt' = \int_0^t \left(\frac{-1}{m(t')}\frac{dm}{dt'}\vec{u} + \vec{g}\right) dt' = -\vec{u}\int_{m(0)}^{m(t)} \frac{1}{m'}dm' + \int_0^t \vec{g}dt' = -\vec{u}(\ln m(t) - \ln m_0) + \vec{g}t + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_R(t) = \underbrace{\vec{v}_0}_{KonstanteCdurchIntegrieren} - \vec{u}\ln\frac{m(t)}{m_0} + \vec{g}t$$

Endgeschwindigkeit hängt nur von der Ausstoßgeschwindigkeit $\vec{u}$ und vom Verhältnis Nutzlast : Startmasse ab.

4.7 Stoßgesetze

Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes

4.7.1 Elastischer Stoß

vor dem Stoß: keine Kräfte, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ Stoß: konservative Kräfte nach dem Stoß: keine Kräfte, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

4.7.2 Un(In-)elastischer Stoß

vor dem Stoß: keine Kräfte, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ Stoß: nicht konservative Kräfte nach dem Stoß: keine Kräfte, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

Für elastische und inelatische Stöße gilt die Impulserhaltung:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

Für elastische Stöße gilt zusätzlich die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2$$

Bei inelastischen Stößen wird die mechanische Energie in andere Energie (z.B. Wärme) umgewandelt. Es gilt nur noch die Ungleichung:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 < \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2$$

Elastische Stöße:
Zentraler Stoß (eindimensionale Bewegung)
Es gelten beide Erhaltungssätze (s.o.)
Es ergeben sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten u_1 und u_2. Auflösen liefert:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_2}{m_1 + m_2}$$

4.7.3 Spezialfälle des zentralen elastischen Stoßes

- Massen der Kugeln sind gleich: $u_1 = v_2, u_2 = v_1$, Geschwindigkeiten vertauschen sich
- Gleiche Massen und zweite Kugel ruht vor dem Stoß: $u_1 = 0, u_2 = v_1$, erste Kugel ruht nach dem Stoß und maximaler Energieübertrag erfolgt.
- Zweite Masse ist unendlich groß und ruht: $u_1 = -v_1, u_2 = 0$, die erste Masse wird reflektiert, kein Energieübertrag, maximaler Impulsübertrag: $\Delta p = m_1u_1 - m_1v_1 = -2m_1v_1$

08.11.01

4.8 Versuch: Kugelreihe mit und ohne Klebewachs

$$n_1mv_1 = n_2mv_2$$

Impulssatz

$$\frac{1}{2}n_1mv_1^2 = \frac{1}{2}n_2mv_2^2$$

Energiesatz

Beide Gleichungen sind erfüllt, wenn gilt $n_1 = n_2, v_1 = v_2$.

Mit Klebewachs: Inelastischer Stoß: Klebewachs führt zu Verlust von mechanischer Energie (inelastischer Stoß).

Aber: Komplizierter als vermutet:

$$2mv_1 = 2mu_1 + mu_2 + mu_3$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} m u_2^2 + \frac{1}{2} m u_3^2$$

Aus den Erhaltungssätzen ergibt sich

$$2v_1 = 2u_1 + u_2 + u_3$$

$$2v_1^2 = 2u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Quadrieren der ersten Gleichung:

$$4v_1^2 = 4u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 4u_1 u_2 + 2u_2 u_3 + 4u_1 u_3$$

Abziehen der zweiten Gleichung:

$$v_1^2 = 2u_1 u_2 + u_2 u_3 + 2u_1 u_3 + u_1^2$$

Es gibt unendlich viele mögliche Kombinationen der Endgeschwindigkeiten. Das Ergebnis hängt vom konkreten Verlauf des Stoßprozesses ab.

Dezentraler Stoß (Dreidimensionale Bewegung)

Es gelten beide Erhaltungssätze mit vektoriellen Geschwindigkeiten.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{u}_2|^2$$

In Komponentenschreibweise

$$m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x} = m_1 u_{1,x} + m_2 u_{2,x}$$

$$m_1 v_{1,y} + m_2 v_{2,y} = m_1 u_{1,y} + m_2 u_{2,y}$$

$$m_1 v_{1,z} + m_2 v_{2,z} = m_1 u_{1,z} + m_2 u_{2,z}$$

Jede Komponente des Impulses wird für sich erhalten

$$\frac{1}{2}(v_{1,x}^2 + v_{1,y}^2 + v_{1,z}^2) + \frac{1}{2}(v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2 + v_{2,z}^2) = \frac{1}{2}(u_{1,x^2} + u_{1,y}^2 + u_{1,z}^2) + \frac{1}{2}(u_{2,x^2} + u_{2,y}^2 + u_{2,z}^2)$$

4 Gleichungen mit 6 Unbekannten $u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}, u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}$. Ergebnis hängt von der Geometrie des Stoßes ab. Daraus: Berechnung der Bahnen.

Dezentraler Stoß im Schwerpunktsystem

Wahl des Koordinatensystem führt zur Vereinfachung. Jedes Inertialsystem ist zur Beschreibung physikalischer Vorgänge geeignet (siehe nächster Abschnitt).

Geradlinig-gleichförmig bewegte Koordinatensysteme sind **Inertialsysteme**.

Schwerpunkt (Massenmittelpunkt): Definition: Der Punkt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

M: Gesamtmasse, $M = \sum_i m_i$ heißt Schwerpunkt.

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems wird erhalten:

$$\vec{p}_{gesamt} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{r}}_s = M \vec{v}_s = \vec{p}_s$$

also bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig. Er ist Ursprung eines Inertialsystems.

Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem ist Null, da der Schwerpunkt nun im Ursprung ruht. Für zwei Teilchen gilt:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Daraus folgt: Zwei Teilchen müssen sich genau aufeinander zu oder voneinader weg bewegen.
Die kinetische Energie wird beim elastischen Stoß erhalten:

$$\frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m_1|\vec{u}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{u}_2|^2$$

mit $m_1|\vec{v}_1| = m_2|\vec{v}_2|$ und $m_1|\vec{u}_1| = m_2|\vec{u}_2|$ folgt (ohne Rechnung)
dass sich nur die Richtung der Geschwindigkeiten ändert (ohne Impulsübertrag).
Inelastischer Stoß im Schwerpunktsystem: Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem ist Null

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$$

Durch Energieumwandlung wird die kinetische Energie kleiner. Nach dem Stoß muss immer noch gelten:

$$\sum_i \vec{p'}_i = \vec{0}$$

Aber die einzelnen Impulse können kleiner sein. Im Extremfall können alle Einzelimpulse Null werden. Umwandlung der gesamten kinetischen Energie der Relativbewegungen.

Vom anderen Koordinatensystem aus gesehen: Der „Schwerpunktimpuls“ und die „Schwerpunktsenergie“ bleibt übrig:

$$\vec{p}_S = M\vec{v}_S$$

$$E_s = \frac{1}{2}M|\vec{v}_s|^2$$

Stöße an Wänden: Das System ist nicht abgeschlossen. Äußere Kräfte der Wand.
1. Elastisch: Die Wand bleibt in Ruhe, also kein Energieübertrag auf die Wand.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{u}|$$

Keine Kräfte parallel zur Wand

$$mv_{parallel} = mu_{parallel}$$

Folglich:

$$mv_{senkrecht} = -mu_{senkrecht}$$

2. Inelastisch:

$$\frac{1}{2}mv^2 > \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow |\vec{v}| > |\vec{u}|$$

Keine Kräfte parallel zur Wand

$$mv_{parallel} = mu_{parallel}$$

Folglich:

$$|mv_{senkrecht}| > |-mu_{senkrecht}|$$

4.9 Leistung, Reibung

4.9.1 Leistung

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Verrichtete Arbeite pro Zeit

Einheit der Leistung: 1 Watt = 1 J/s.

$$W = \int_{x_0}^{x_1} \vec{F} d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} d\vec{t} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} d\vec{t}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\text{Skalarprodukt}}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

09.11.01

Beschleunigung mit konstanter Kraft:

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}$$

Differentialgleichung integrieren

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \frac{F}{m} t + \vec{v}_0$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{F}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$$

$$\Rightarrow P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = \frac{F^2}{m} t + \vec{v}_0 \cdot \vec{F}$$

Die Leistung steigt linear mit der Zeit an!

Leistung und potentielle Energie:

$$\Delta E_{pot} = \Delta mgh$$

$$P = \frac{\Delta E_{pot}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} gh$$

$$P = \frac{\Delta m}{\Delta s} vgh$$

Der Motor muss die Leistung P liefern.

4.10 Reibung

4.10.1 Haftreibung

$$|\vec{F}_r \leq \mu_H |\vec{F}_N|$$

F_N: Normalkraft, F_R: Reibungskraft, μ_H: Haftreibungskoeffizient.

Die Haftreibung hängt nicht von der Auflagefläche, sondern nur von der Andruckkraft ab.

Der Körper beginnt zu rutschen, wenn

$$\vec{F}_G \sin\alpha = \mu_H \vec{F}_G \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \mu_H = \tan\alpha$$

4.10.2 Gleitreibung

Wenn der Körper rutscht, wird die Reibungskraft geringer:

$$|\vec{F}_R| = \mu_G |\vec{F}_N|$$

F_N: Normalkraft, F_R: Reibungskraft, μ_G: Gleitreibungskoeffizient

4.10.3 Rollreibung

Analog:

$$|\vec{F}_R| = \mu_R |\vec{F}_N|$$

F_N: Normalkraft, F_R: Reibungskraft, μ_R: Gleitreibungskoeffizient

4.10.4 Viskose Reibung (Stokes-Reibung)

Kleine, langsame Kugel mit Radius r in einer viskosen Flüssigkeit

$$\vec{F}_r = -6\pi\eta r\vec{v}$$

η: Viskosität der Flüssigkeit; Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit

Unter Einfluss der Geschwindigkeit: Nach anfänglicher Beschleunigung konstante Sinkgeschwindigkeit

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_G$$

$$-6\pi\eta r\vec{v} = -m\vec{g}$$

$$\vec{v} = \frac{m\vec{g}}{6\pi\eta r}$$

4.10.5 Schnelle Bewegung in Gas oder Flüssigkeit

Reibungskraft ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v:

$$F_R = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2$$

c_W: Widerstandskoeffizient (Kugel: $c_w \approx 1$, Stromlinienform: $c_w < 1$) ρ: Dichte des Mediums (Gas, Flüssigkeit) A: Querschnittsfläche

Die Kugel beschleunigt das Medium auf die Geschwindigkeit $\approx v$.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho A v^3 \Delta t$$

$$\Rightarrow P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho A V^3 = v F_R$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{1}{2} \rho A v^2$$

4.11 Inertialsysteme

Physikalische Vorgänge kann man von verschiedenen Standpunkten aus beobachten.

- Koordinatensysteme mit gegeneinander verschobenem Ursprung sind gleichberechtigt. → Inertialsysteme
- Geradlinig-gleichförmig gegeneinander bewegte Koordinatensysteme sind auch gleichberechtigt. → Inertialsysteme
- Physikalische Vorgänge in beschleunigten Koordinatensystemen verhalten sich anders. → Keine Inertialsysteme

Beobachtungen aus Inertialsystemen führen immer auf die gleichen physikalischen Gesetze.

Aus physikalischen Messungen innerhalb eines Inertialsystems kann man nicht feststellen, wo es sich befindet und wie schnell es sich bewegt.

4.11.1 Galileo-Transformation

Das Koordinatensystem „mit Strich“ bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ gegen das andere, dann transformieren sich die physikalischen Größen wie:

$$\vec{r'}(t) = r(t) - \vec{u}(t)$$

$$t' = t$$

$$\Rightarrow \vec{v'}(t) = \dot{\vec{r'}}(t) = \vec{v}(t) - \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{a'}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{F'} = \vec{F}$$

13.11.01

4.11.2 Transformation von Energie und Impuls

Ist das System abgeschlossen bleibt die potentielle Energie im Sysytem gleich (hängt nur von Relativkoordinaten ab):

Die kinetische Energie hängt vom System ab:

$$E'_{kin} = \frac{1}{2} m \left| \vec{v}(t) - \vec{u} \right|^2$$

Ebenso der Impuls:

$$\vec{p} = m(\vec{v} - \vec{u})^2$$

Energie und Impuls bleiben nicht erhalten beim Übergang von einem Inertialsystem zum Anderen. Innehalb von jedem Inertialsystem gelten die Erhaltungssätze.

4.11.3 Arbeit

Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ im einen Inertialsystem, wirkt im anderen ebenso $\vec{F}$. In einer Zeit Δt werden aber verschiedene Wege zurückgelegt.

$$\vec{v}'\Delta t' = \vec{v}\Delta t - \vec{u}\Delta t$$

dadurch wird unterschiedlich viel Arbeit an einer Masse verrichtet:

$$W' = \vec{F} \cdot \vec{v}'\Delta t' \neq \vec{F} \cdot \vec{v}\Delta t = W$$

In abgeschlossenen Systemen wirkt aber immer eine Gegenkraft auf eine andere Masse. Dadurch wird der Unterschied kompensiert und die Energieerhaltung gilt.

4.11.4 Inertialsysteme an der Erdobefläche (im Alltag)

Koordinatensystem, das im Labor ruht:

1. Erde als Teil des abgeschlossenen Systems einbezogen → Inertialsystem (nicht ganz, da die Erde rotiert; rotierende Systeme sind beschleunigt). Energie und Impuls der ganzen Erde muss berücksichtigt werden.

2. Erde nicht einbezogen → äußere Kräfte wirken → kein abgeschlossenes System → kein Inertialsystem, keine Energieerhaltung, keine Impulserhaltung (frei fallender Körper gewinnt Energie und Impuls)

3. Gravitationsfeld mit einbezogen ins System (potentielle Energie) → Energieerhaltung stimmt: $E_{kin} + E_{pot} = \text{const}$, Impulserhaltung aber nicht (frei fallender Körper gewinnt Impuls). → kein Inertialsystem.

4.11.5 Anmerkung zur allgemeinen Relativitätstheorie

Im Gravitationsfeld frei fallende System sind Inertialsysteme. Geradlinig beschleunigte Systeme sind nicht zu unterscheiden von System, die im Gravitationsfeld ruhen (Gleichheit von träger und schwerer Masse). Frei fallende Systeme sind zwar beschleunigt, aber Gravitation und Beschleunigung kompensieren sich gerade. → Schwerelosigkeit.

4.11.6 Realisierung von Inertialsystemen an der Erdoberfläche

1. Kompensation aller äußeren Kräfte durch andere äußere Kräfte. Z.B. Luftkissenschiene (Kompensation der Gravitation).

2. Fallturm, z.B. in Bremen, 110 Meter hoch

Weltraumfahrt: Satelliten „fallen um die Erde herum“ → Schwerelosigkeit. Zentrifugalbeschleunigung kompensiert Gravitation. Rotation der Systeme (Erde, Satellit) verursacht keine Kräfte. Größenordnung von 10^{-6} der Erdbeschleunigung (**Microgravity**). → Experimente zu inneren Kräften in Flüssigkeiten etc.

4.11.7 Scheinkräfte

Inertialsysteme: Keine Scheinkräfte

Andere Systeme: Ein Experimentator im fensterlosen Labor beobachtet „unerklärliche“ Kräfte. Äußere Kräfte oder Kräfte durch Beschleunigung des Koordinatensystems.

Beispiele:

- Geradlinig beschleunigte Systeme: Trägheit
- Rotierende Systeme: Zentrifugalkraft, Corioliskraft

Anmmerkung zur Relativitätstheorie
Spezielle Relativitätstheorie (Lorentz-Transformation):
u zeige in x-Richtung:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Lorentz-Kontraktion in Bewegungsrichtung

$y' = y, z' = z$

$$t' = \frac{\frac{t-ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Zeitdilatation

14.11.01

5 Dynamik starrer Körper

Bewegungen starrer Körper werden zerlegt in **Translation** und **Rotation**. Für die Translation des Schwerpunktes gelten die bisher genannten Gesetze.

5.1 Rotation um eine fest eingespannte Achse

Beschreibung einer Rotation:

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$$

Richtung von $d\vec{\phi}$ ist Richtung der Achse, Betrag von $d\vec{\phi}$ ist Winkel um den gedreht wurde, Einheit von $\vec{\phi}$ ist rad.

$$[\vec{\phi}] = \text{rad}$$

Die Richtung von $d\vec{\phi}$ ergibt sich mit der Rechte Hand-Regel.
Kreuzprodukt:
$\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt Fläche eines Parallelogramms mit den beiden aufspannenden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$: senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Betrag:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

hat die Richtung der Drehachse ebenso wie $d\vec{\phi}$. Der Betrag gibt die „Drehgeschwindigkeit“ an. Einheit: rad/s.
Bei konstantem $\vec{\omega}$ gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T: Zeit für eine Umrundung
Wenn die Achse durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, ist die momentane Geschwindigkeit eines Punktes:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

5.2 Rotationsenergie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2$$

Für das Kreuzprodukt gilt:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin \alpha = \omega R$$

Es folgt:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$$

Bei ausgedehnten Körpern: Zerlegung in kleine Elemente m_i:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

mit

$$J = \sum_i m_i R_i^2$$

J: **Trägheitsmoment**, $[J] = \text{kgm}^2$.
In Massenelementen, die weiter von der Achse entfernt sind steckt mehr Energie, da ihre Geschwindigkeit größer ist.
Aus Analogie der Formeln erkennt man

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

bei Rotationen spielt das Trägheitsmoment die gleiche Rolle wie die Masse bei Translationen.

5.2.1 Integrale Schreibweise

beim Grenzübergang dm $\to 0$ erhält man:

$$\int_r \rho R^2 \mathrm{dV}$$

R: Abstand von der Achse
Hierbei ist ρ die Dichte = Masse / Volumen.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Beispiel Zylinder:

$$J = \int_V \rho R^2 \underbrace{2\pi R h \mathrm{dR}}_{dV} = 2\pi\rho h \int_0^{R_{max}} R^3 \mathrm{dR} = \frac{1}{2}\pi\rho h R_{max}^4 = \frac{1}{2}MR_{max}^2$$

Gesamtmasse:

$$M = \rho h R_{max}^2 h$$

15.11.01

Der Winkel Phi ist ein Vektor. Er steht senkrecht auf der Ebene, in der gedreht wird (Kreuzprodukt).

5.2.2 Beispiele für Trägheitsmomente

- Zylinder, Scheibe: $J = \frac{1}{2}MR^2$
- Hohlzylinder: $J = \frac{1}{2}M(R_a^2 + R_i^2)$
- Kugel: $J = \frac{2}{5}MR^2$
- Stab (Achse am Ende): $J = \frac{1}{3}ML^2$
- Stab (Achse in der Mitte): $J = \frac{1}{12}ML^2$
- Hantel: $J = \frac{1}{4}ML^2$

M: Gesamtmasse, R: Radius, L: Länge

5.2.3 Steinerscher Satz:

Ist das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt bekannt, ergibt sich für eine andere dazu parallele Achse:

$$J = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i |\vec{a} + \vec{R}'_i|^2 = \sum_i m_i (a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{R}'_i + R'^2_i) = \sum_i m_i R'^2_i + \underbrace{2\vec{a} \sum_i m_i \vec{R}'_i}_{=0} + a^2 \sum_i m_i$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der neuen Achse:

$$J = J_S + Ma^2$$

a: Abstand der Achse vom Schwerpunkt
Drehmoment (feste Achse):

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

Rotationsenergie
Ableiten nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}E_{rot}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} J (\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{\omega}}) = J \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_{rot}}{\mathrm{d}t} = J \dot{\vec{\omega}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\phi}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}E_{rot} = J \dot{\vec{\omega}} \cdot \mathrm{d}\vec{\phi}$$

$$E_{rot} = \int \underbrace{J \dot{\vec{\omega}}}_{\vec{M}} \cdot \mathrm{d}\vec{\phi}$$

$$\vec{M} = J \dot{\vec{\omega}}$$

Aktionsprinzip, analog zu $\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$
Drehimpuls (feste Achse):
Analog zu der Schreibweise des Aktionsprinzips der Translation

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

Ergibt sich für die Rotation um feste Achse

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{dJ}{dt}\vec{\omega}$$

Mit dem Drehimpuls

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Wenn kein Drehmoment wirkt, bleibt der Drehimpuls erhalten.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltungssatz
Versuch Drehschemel Wenn J kleiner wird, muss ω größer werden.
Verrichtete Arbeit gegen Zentrifugalkraft:

$$W = \int_{R_1}^{R_2} F_Z dR = \int_{R_1}^{R_2} m\omega^2 R dR$$

5.2.4 Zusammmenhang zwischen Drehmoment und Kraft

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

mit

$$d\vec{s} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$$

erhält man

$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{r})$$

Spatprodukt! Es gilt also folglich ebenso:

$$dW = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\phi}$$

Also:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Gleichgewicht:
Wenn die Summe aller Drehmoment in Achsrichtung gleich null ist, tritt keine Drehbeschleunigung auf. Verharrt in Ruhe bzgl. einer Drehung:

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

Hebel:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

16.11.01

Versuch: Drehmomente durch Gewichtskraft Gleichgewicht, wenn M = 0 Gleichgewicht immer dann, wenn Schwerpunkt über oder unter der Achse

Stabiles Gleichgewicht: Schwerpunkt unter Achse. Bei Auslenkung Drehmoment in Richtung zur Gleichgewichtslage

Labiles Gleichgewicht: Schwerpunkt über der Achse. Bei Auslenkung Drehmoment weg von der Gleichgewichtslage.

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$\vec{F}_1$ von Gewicht 1, $\vec{F}_2$ von Gewicht 2, $\vec{F}$ Gewichtskraft auf Schwerpunkt.

Zusammenhang Drehimpuls und Impuls

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Überprüfung: Für ein Massenelement erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = m \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v}}_{=0,\text{weil } \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$$

also wie erwartet:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

Zusammenhang Drehimpulserhaltung und Impulserhaltung

Impulserhaltung:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

$$L = mrv \sin\alpha = mRv$$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const.}$$

Impulserhaltung gilt nicht.

Zum Drehimpuls:

- Radiale Kräfte verursachen kein Drehmoment. Sie ändern nicht den Drehimpuls.
- Beim Impulserhaltungssatz werden alle Kräfte berücksichtigt.
- Beim Drehimpulserhaltungssatz werden Radialkräfte nicht berücksichtigt. (Radialkräfte nimmt die Achse auf.)
- Wenn der Drehimpulserhaltungssatz gilt, gilt nicht unbedingt der Impulserhaltungssatz (äußere Kräfte durch Achse).

- Wenn der Drehimpulserhaltunggsatz gilt, gilt er nicht unbedingt bzgl. einer anderen Achse (Radialkräfte sind jetzt keine Radialkräfte mehr).
- Der Impuls hat eine andere Richtung als der Drehimpuls.

Rotation um freie Achsen
Achse nicht gelagert oder in einem Punkt gelagert (Kreisel)
Das Drehmoment bewirkt Änderung der Richtung von $\vec{\omega}$.
Das Trägheitsmoment eines Körpers hängt von der Richtung der Achse ab.
Also ändert sich auch das Trägheitsmoment.
Die Richtungsabhängigkeit des Trägheitsmomentes wird mit einem Tensor (Matrix) beschrieben.
Trägheitstensor
Im allgemeinen Fall ist der Drehimpuls nicht parallel zur Drehachse.
Man kann zeigen:

$$\vec{L} = \tilde{J}\vec{\omega}$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

Trägheitsellipsoid
Trägt man $\frac{1}{\sqrt{J}}$ für jede mögliche Achse durch den Schwerpunkt auf, erhält man einen Ellipsoid.

Der Ellipsoid hat drei Hauptachsen (die senkrecht zueinander stehen). Die Trägheitsmomente in diesen Richtungen nennt man „Hauptträgheitsmomente“.

Mit einem kartesischen Koordinatensystem entlang der Hauptachsen ist der Trägheitstensor diagonal:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{bmatrix}$$

J_a, J_b und J_c sind die Hauptträgheitsmomente.

- oblater Trägheitsellipsoid: größtes J bzgl. senkrechter Achse
- polater Trägheitsellipsoid: kleinstes J bzgl. senkrechter Achse

Freie Achsen
Die eingezeichnete Drehachse kann nur durch Kräfte auf die Achse beibehalten werden, denn

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

Nach Freigabe der Achse erfolgt die Drehung um die Richtung von $\vec{L}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Kräfte wirken nur noch entlang der Stange (innere Radialkräfte). Auf die Achse wirkt kein Drehmoment. Solche Achsen bezeichnet man als „freie Achsen“.

Freie Achsen

Achsen in Richtung der Hauptachsen des Trägheitsellipsoids sind freie Achsen.

Der Vektor $\vec{\omega}$ hat nur eine Komponente, z.B.

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_l)$$

damit folgt

$$\begin{bmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_l \end{bmatrix}$$

also

$$\vec{L} = (0, 0, J_\omega)$$

20.11.01

Stabilität freier Achsen

Rotationen um die Achse mit dem größten und mit dem kleinsten Trägheitsmoment sind stabil. Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist nicht stabil: Kleine Störungen führen zum Torkeln.

5.2.5 Der Kreisel

Nur Betrachtung symmetrischer Kreisel. Zwei Hauptträgheitsmomente sind gleich: $J_a = J_b < J_c$ oder $J_a < J_b = J_c$. Rotationssymmetrische Objekte sind symmetrische Kreisel. Symmetrieachse (Figurenachse) ist immer die größte oder die kleinste Hauptträgheitsachse. Kreisel mit größtem J bzgl. Figurenachse laufen besonders stabil.

Kräftefreier Kreisel

Kreisel ist im Schwerpunkt punktförmig gelagert → Achse frei drehbar. Keine Translation, keine Drehmomente. Figurenachse des Kreisels ist freie Achse, weil Hauptträgheitsachse. Wenn Rotation um Figurenachse, dann $\vec{\omega} \| \vec{L}$.

Nutation

Durch kurze äußere Einwirkung wird die Richtung von $\vec{L}$ geändert. Richtung von Drehimpuls, momentaner Winkelgeschwindigkeit und Figurenachse sind verschieden.

Die Richtung von $\vec{L}$ ist konstant (raumfest). Die Richtung der Figurenachse kreist um die Drehimpulsrichtung → **Nutation** (Figurenachse bewegt sich auf dem Nutationskegel). Die Richtung der momentanen Drehachse kreist um die Drehimpulsrichtung (**Rastpolkegel**).

Die komplizierte Bewegung ist notwendig um den Drehimpuls zu erhalten.

Präzession

Kreisel mit äußeren Drehmomenten (Kräften). Insbesondere meint man Drehmomente auf die Figurenachse, die die Richtung aber nicht den Betrag des Drehimpulses ändern:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

Veranschaulichung am Gyroskop

Euler'sche Gleichungen

Im raumfesten Koordinatensystem (Index R) gilt:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \right)_R$$

Im drehfesten Koordinatensystem des Kreisels (Hauptträgheitsachsen) gilt:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_K + \vec{L} \times \vec{\omega}$$

Eulersche Gleichungen (Differentialgleichungen für Kreisel):

$$J_a \frac{\mathrm{d}\omega_a}{\mathrm{d}t} + (J_c - J_b)\omega_c\omega_b = \vec{M}_a$$

$$J_b \frac{\mathrm{d}\omega_b}{\mathrm{d}t} + (J_a - J_c)\omega_a\omega_c = \vec{M}_b$$

$$J_c \frac{\mathrm{d}\omega_c}{\mathrm{d}t} + (J_b - J_a)\omega_b\omega_a = \vec{M}_c$$

Versuch Kinderkreisel

Ein Kinderkreisel richtet sich nach einer Weile auf.

Fuß des Kreisels ist nicht spitz. Durch das Abrollen auf der Unterlage (Reibung) wird die Präzession beschleunigt. Für das Anheben des Schwerpunkts notwendige Energie wird der Rotation entzogen.

Versuch: Bierdeckelwerfen

Der anfangs waagerecht fliegende Bierdeckel kippt während des Fluges nach links. 22.11.01

5.3 Bewegung in rotierenden Bezugssystemen

Rotierende Koordinatensysteme sind keine Inertialsysteme. Für den Beobachter im System, der nicht weiß, dass es sich dreht treten „unerklärliche“ Kräfte auf: Scheinkräfte.

Das eine System ruht (ungestrichenes System), das andere dreht mit konstantem ω (gestrichenes System).

Transformation der Geschwindigkeiten:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

u: lokale Relativgeschwindigkeit

Durch Ableiten erhält man die Transformation der Beschleunigung: (etwas komplizierte Rechnung)

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{2(\vec{v}' \times \vec{\omega})}_{Coriolisbeschleunigung} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})}_{Zentrifugalbeschleunigung}$$

Als Ursache der Beschleunigung vermutet der rotierende Beobachter Kräfte (Scheinkräfte).

Zentrifugalkraft:

$$\vec{F}_Z = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

Corioliskraft:

$$\vec{F}_C = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega})$$

Zentrifugalkraft ist ortabhängiig (Abstand von der Drehachse).

$$|\vec{F}_Z| = mR\omega^2$$

R: Abstand von der Drehachse

Corioliskraft ist geschwindigkeitsabhängig (Komponente senkrecht zu Achse). Bewegung parallel zur Achse erfährt keine Corioliskraft.

Foucault-Pendel

Ein Pendel wird durch die Corioliskraft abgelenkt. Am Nordpol ist der Effekt am größten, am Äquator keine Ablenknung, da $\vec{v} || \vec{\omega}$.

Foucaults Originalexperiment: 1850 in Paris.
Berechnung der Ablenkung:
Nach der Zeit Δt:

$$\vec{s} = \vec{v}\Delta t$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a}_C \Delta t^2$$

mit Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a}_C = 2(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 2v\omega \sin\alpha$$

folgt:

$$\vec{d} = \frac{1}{2}(2v\omega \sin\alpha)\Delta t^2$$

Ablenkwinkel:

$$\Delta\phi = \frac{d}{s} = \frac{v\omega \sin\alpha \Delta t^2}{v\Delta t}$$

Winkelgeschwindigkeit der Pendeldrehung:

$$\omega_P = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega \sin\alpha$$

Experiment
0,2°: 55s 0,4°: 120s
Komplette Drehung in ca. 30 Std.
Weitere moderne Messmethoden: Messung mit Lasern (Genauigkeit: 10^{-9} der Erddrehung) Messung mit suprafluidem Helium (Genauigkeit: ca. 10^{-9} der Erddrehung) 23.11.01

6 Schwingungen

Schwingungen haben eine zentrale Bedeutung in der Physik. Der Formalismus wird in sehr vielen Bereichen der Physik verwendet.

Federpendel (ungedämpft): Die elastische Kraft einer Feder ist proportional zur Auslenkung: Hooksches Gesetz (vgl. Abschnitt Elastizität)

$$F = -Dx$$

D: Federkonstante

Kräfte, die an der Masse angreifen:
1. Ruhelage:

$$F_G + F_F = mg - Dx_0 = 0$$

Die Auslenkung x_0 kompensiert die Gewichtskraft.
2. Auslenkung aus der Ruhelage
Man wählt den Nullpunkt von x bei der Ruhelage und betrachtet m in der Ruhelage als kräftefrei. Verbleibende Auslenkungen beschleunigen m.

$$ma = -Dxm\ddot{x}(t) = -Dx(t)\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$$

Differentialgleichung

Versuch eine Lösung zu finden: Schwingung ist periodisch, also:

$$x(t) = \sin(\omega t)\dot{x}(t) = \omega\cos(\omega t)\ddot{x}(t) = -\omega^2 \sin(\omega t)$$

Einsetzen:

$$-\omega^2 \sin(\omega t) = -\frac{D}{m} \sin(\omega t)$$

Ergbibt Bestimmungsgleichung für den Parameter ω:

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

Die Funktion

$$x(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t\right)$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung („harmonische Schwingung"). Die Frequenz der Schwingung ist durch Federkonstante und Masse festgelegt.

Schwingungsdauer: Eine volle Schingung ist durchlaufen wenn $\omega T = 2\pi$, also

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Suche nach weiteren Lösungen: Schwingungen mit anderen Amplitude und Phase sind auch möglich. Amplitude und Phase werden erst durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Alle Funktionen der Form

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

sind auch Lösungen, denn

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Einsetzen liefert ebenso

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\frac{D}{m} A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t + \phi\right)$$

A: Amplitude ϕ: Phase

Berechnung der Amplitude und Phase aus den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 = A \sin\phi \dot{x}(0) = v_0 = A\sqrt{\frac{D}{m}} \cos\phi$$

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten sind (eindeutig) lösbar:

Dividieren liefert

$$\frac{x_0}{v_0} = \sqrt{\frac{m}{D}} \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \sqrt{\frac{m}{D}} \tan\phi \phi = \arctan\left(\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{D}{m}}\right)$$

Phase der Schwingung

Einsetzen liefert A:

$$A = \frac{x_0}{\sin\phi}$$

Amplitude der Schwingung

Drehpendel (ungedämpft):

Feder erzeugt ein Drehmoment

$$\vec{M} = -D\vec{\phi}$$

proportional zum Drehwinkel
Aktionsprinzip für Drehungen liefert:

$$J\ddot{\vec{\phi}} = \vec{M}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\ddot{\vec{\phi}} = -\frac{D}{J}\vec{\phi}$$

Man findet ganz analog die allgemeine Lösung:

$$\phi(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t + \alpha\right)$$

Fadenpendel (ungedämpft, starrer „Faden“):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} = (l\sin\phi, 0, -l\cos\phi)$$
$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$
$$\vec{r} \times \vec{F} = (r_y F_z - r_z F_y, r_z F_x - r_x F_z, r_x F_y - r_y F_x)$$
$$\Rightarrow \vec{M} = (0, mgl\sin\phi, 0)$$

Aktionsprinzip

$$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$$

mit $\vec{\omega} = (0, -\dot{\phi}, 0)$

$$-J\ddot{\phi} = mgl\sin\phi$$

Näherung punktförmige Kugel: $J = ml^2$ (mathematisches Pendel)

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$$

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$$

kann nicht als einfache Funktion hingeschrieben werden. Eine Möglichkeit: Differentialgleichung nähern für kleine Auslenkungen:

$$\sin\phi = \phi - \underbrace{\frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \ldots}_{klein\,f\ddot{u}r\,kleine\,\phi}$$

Damit ergbit sich

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\phi$$

Ansatz für die Funktionen:

$$\phi(t) = A\sin(\Omega t + \alpha)$$
$$\dot{\phi(t)} = A\Omega\cos(\Omega t + \alpha)$$
$$\ddot{\phi(t)} = -A\Omega^2\sin(\Omega t + \alpha)$$

Einsetzen in Differentialgleichung liefert:

$$-A\Omega^2\sin(\Omega t + \alpha) = -\frac{g}{l}A\sin(\Omega t + \alpha)$$

die Bestimmungsgleichung für die Frequenz:

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Allgemeine Lösung für kleine Auslenkungen ist also:

$$\phi(t) = A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha)$$

Amplitude A und Phase α müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.
Näherung gut für Winkel $< 5 - 10$.
Berechnung für Fadenpendel mit augedehnter Kugel:

$$-J\ddot{\phi}(t) = mgl\phi(t)$$

Trägheitsmoment der Kugel: $J = \frac{2}{5}mR^2$
Steinerscher Satz liefert:

$$J = ml^2 + \frac{2}{5}mR^2$$

Es folgt:

$$-(ml^2 + \frac{2}{5}mR^2)\ddot{\phi}(t) = mgl\phi(t)$$
$$-(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2})\ddot{phi}(t) = \frac{g}{l}\phi(t)$$
$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{g}{l}\frac{1}{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}\phi(t)$$

Man erhält als Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right)}$$

Versuch: Bestimmung von g daraus zu $(9,8016 \pm 0,005)\frac{m}{s}$.

27.11.01

Numerische Lösung der exakten Differentialgleichung:

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{g}{l}\frac{1}{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}\sin\phi(t)$$

Umschreiben in zwei Gleichungen erster Ordnung:

$$\dot{\phi} = \omega(t)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l}\frac{1}{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}\sin\phi(t)$$

Schritt für Schritt rechnen:

$$\phi(t+\Delta t) = \phi(t) + \omega(t)\Delta t \| \phi(0) = \phi_0$$

$$\omega(t+\Delta t) = \omega(t) - \left(\frac{g}{l}\frac{1}{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}\sin\phi(t)\right)\Delta t \| \omega(0) = \omega_0$$

Schwingungsdauer hängt von der Amplitude ab. Für kleine Amplituden $\phi_0 < 5$ ist die linearisierte Differentialgleichung geeignet.

Wenn die Schwingungsdauer von der Auslenkung abhängt, ergeben sich Bewegungen, die nicht sinusförmig sind. (Anharmonische Schwingung)

Beispiel: Mit Laserpulsen Anregung der Elektronen in Festkörpern zu Schwingungen: schwacher Laserpuls → kleine Amplitude → harmonische Schwingung starker Laserpuls → große Amplitude → anharmonische Schwingung.

Federpendel: Komplexer Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung:

Die Bewegung wird vollständig beschrieben durch die Funktion

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t + \phi\right)$$

Aber es gibt noch weitere Lösungen derselben Differentialgleichung: Komplexe Lösungen (Funktionen mit komplexen Zahlen).

Die komplexe Funktion selbst ist für die Physik nicht relevant! Die physikalisch relevante Funktion ist reell.

Suche der komplexen Lösung und anschließend Berechnung einer reellen Lösung aus den komplexen Zahlen.

Wichtig: Komplexe Exponentialfunktion

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

(Eulersche Formel)

Die Differentialgleichung für das Federpendel lautet:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$$

komplexe Exponentialfunktion als Lösung probieren: $X \in C$

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

$$\dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen liefert

$$\lambda e^{\lambda t} = -\frac{D}{m}e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{D}{m}}$$

λ ist rein imaginär und wir schreiben abgekürzt:

$$\lambda = \pm i\omega$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Die reelle Lösung setzt sich aus beiden komplexen Lösungen zusammen, z.B.:

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \cos\omega t$$

Für die allgemeine Lösung fügen wir Amplitude und Phase hinzu:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Sie kann auch aus einer Linearkombination der komplexen Lösungen gewonnen werden.
Federpendel: Gedämpft durch Stokesche Reibung Nullpunkt von x sei in der Ruhelage. Dort sind Gewichtskraft und Auftrieb bereits kompensiert.
Weitere Kräfte:

$$F_F = -Dx$$

$$F_R = -6\pi\eta rv$$

Bewegungsgleichung aus Aktionsprinzip:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - 6\pi\eta r\dot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}(t) = 0$$

Abkürzung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Ansatz $\lambda \in C$, A, ϕ reelle Amplitude und Phase

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

$$\dot{X}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{lambdat} = 0$$

Daraus Bestimmung für λ:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Quadratische Gleichung mit den Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma ...$$

1. Fall: schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Radikand ist negativ

Wurzel wird imaginär. Abkürzung:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Kombination beider komplexen Lösungen, z.B.:

$$X(t) = \frac{1}{2}(e^{-\gamma i + i\omega t} + e^{-\gamma i - i\omega t}) = e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Beachte: Schwingungsfrequenz ω ist anders als ω_0 beim ungedämpften Pendel. 28.11.01

2. Fall: starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Radikand ist positiv

Wurzel bleibt reell. Abkürzung:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \alpha$$

mit $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Kombination beider komplexen Lösungen, z.B.:

$$X(t) = \frac{1}{2}(e^{-\gamma t + \alpha t} - e^{-\gamma t - \alpha t}) = e^{-\gamma t} \sinh \alpha t$$

Eine reelle Lösung für x(0) = 0 lautet:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sinh \omega t$$

Es gibt weitere reelle Kombinationen der komplexen Lösungen für $x(0) = 0$.

3. Fall: aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{=0}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma$$

Beide komplexe Lösungen sind entartet. Man kann zeigen, dass dann die Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t}$$

A und B lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Anwendung in Zeigerinstrumenten.

Federpendel: periodisch angeregt (erzwungene Schwingung)

Es wirke eine äußere Kraft

$$F_A(t) = F_0 \cos \omega t$$

Kräftebilanz und Differentialgleichung:

$$\ddot{x}(t) + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Abkürzungen:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = K\cos\omega t$$

Die äußere Kraft prägt der Schwingung eine Frequenz auf.
Lösungsansatz:

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega t + \phi)$$

Der erste Term verschwindet nach dem Einschwingvorgang. Es bleibt:

$$x(t) = A_2\cos(\omega t + \phi)$$

Die Anfangsbedingungen bestimmen den Einschwingvorgang. Die Parameter A_2 und ϕ werden nur durch K, ω, γ, und ω_0 bestimmt. Einsetzen von $x(t)$ in die Differentialgleichung liefert nach längerer Rechnung:

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A_2 = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Das Maximum der Amplitude liegt bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_K = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Die Amplitude ist umso größer, je dichter ω an ω_0 liegt. Die Resonanz ist umso schmaler, je schwächer die Dämpfung ist. Die Phase ändert sich von 0 auf $-\pi$ mit zunehmender Frequenz. Die stärkste Phasenänderung ist bei ω_0. Der Phasensprung ist umso abrupter je schwächer die Dämpfung ist.

Energiebilanz bei Schwingungen:
1. Ungedämpfte harmonische Schwingungen:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Mit

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

folgt

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}DA^2\underbrace{(\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi))}_{=1}$$

Die in der Schwingung gespeicherte Energie ist proportional zum Amplitudenquadrat.
2. Schwach gedämpfte harmonische Schwingungen:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Nach einer Schwingung ist die Amplitude:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \frac{Ae^{-\gamma(t+T)}\cos(\omega t + \underbrace{\omega T}_{=2\pi} + \phi)}{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)} = e^{-\gamma T}$$

Auch die maximale Auslneknung verringert sich um $e^{-\gamma T}$.

$$\Delta E_{pot} = \frac{1}{2}D(Ae^{-\gamma T})^2 - \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA^2(e^{-2\gamma T} - 1)$$

Die im Mittel abgegebene Leistung ist

$$P = \frac{\Delta E_{pot}}{T} = \frac{\frac{1}{2}DA^2(1 - e^{-2\gamma T}}{T} \approx \frac{DA^2\gamma T}{T} = DA^2\gamma$$

Die Energie wird nicht kontinuierlich abgegeben, denn

$$F_r = -6\pi\eta r\dot{x}(t)$$

3. Erzwungene Schwingung:
Nach dem Einschwingvorgang ist

$$x(t) = A_2\cos(\omega t + \phi)$$

Die in der Schinwung gespeicherte Energie

$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

ist zeitunabhängig.
Die aus der Anregung aufgenommene Leistung geht direkt in die Reibung.

$$P = \vec{F}_R \cdot \vec{v} = 2\gamma m v^2 = 2\gamma m A_2^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

Über eine Periode umgesetzte Arbeit:

$$W = \int_t^{t+T} P\mathrm{d}t = 2\gamma m A_2^2\omega^2 \underbrace{\int_t^{t+T}\sin^2(\omega t + \phi)\mathrm{d}t}_{=\frac{T}{2}}$$

29.11.01

Umgesetzte Arbeit pro Schwingung

$$W = \gamma m A_2^2\omega^2 T$$

Im zeitlichen Mittel umgesetzte Leistung:

$$P(quer) = \frac{W}{T} = \gamma m A_2^2\omega^2$$

Einsetzen der Amplitude A_2 liefert:

$$P(quer)(\omega) = \frac{\gamma m\omega^2 K^2}{(\omega_0^2 - \omega)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

Die größte Leistung wird bei $\omega = \omega_0$ umgesetzt.

Die Funktion ist symmetrisch um ω_0 und zeigt wie gut die Anregung $\cos\omega t$ an die Schiwingung mit der Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung 2γ ankoppelt.

Frequenzanalyse

Überlagerung von Schwingungen

1. gleiche Frequenz Überlagern sich zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz erhält man eine Schwingung mit derselben Frequenz, aber anderer Amplitude und Phase.

2. verschiedene Frequenzen Bei Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen erhält man eine Schwebung

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t), x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

Mit einem Additionstheorem ergibt sich

$$x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Liegen die Frequenzen ω_1 und ω_2 dicht beieinander, ergibt der Faktor

$$\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

eine einhüllende Funktion und der Faktor

$$\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

die „scheinbare Schingungsfrequenz“. (die größere Frequenz)

Eine Frequenzanalyse zeigt aber, dass die mittlere Frequenze $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ nicht wirklich in der Schwingung enthalten ist.

Darstellung periodischer Funktionen als Überlagerung mehrerer harmonischer Schwingungen Jede periodische Funktion (Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$) kann als unendliche Summe über harmonische Schwingungen geschrieben werden:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

Die Koeffizienten (Vorfaktoren) a_n und b_n geben an, wie groß der Anteill der jeweiligen Frequenzen in der Funktion $x(t)$ ist. Aus $x(t)$ lassen sich die Koeffizienten berechnen (Frequenzanalyse):

$$a_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

Versuch: Zungenfrequenzmesser

Blattfedern sind so abgestimmt, dass sie die Resonanzfrequezen $n\omega$ haben. Die Dämpfung der Federn sei schwach, so dass die Resonanzkurve schmal ist. Jede Feder koppelt nur an den Anteil der Schwingung mit der Frequenz $n\omega$. (**Fourier-Analyse**).

Anharmonische Schwingungen sind aus mehreren Frequenzen zusammengesetzt.

Frequenzanalyse nicht periodischer Funktionen Nicht periodische Funktionen können als Überlagerung eines kontinuierlichen Frequenzspektrums dargestellt werden.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Die Funktion $A(\omega)$ gibt an, wie groß der Anteil der jeweiligen Frequenz in der Funktion $x(t)$ ist.
Aus $x(t)$ lässt sich die Funktion $A(\omega)$ (das Spektrum) berechnen:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t$$

Statt komplexem $A(\omega)$ könnte man auch reelle $a(\omega)$ und $b(\omega)$ verwenden und in $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ zerlegen. 30.11.01

7 Deterministisches Chaos

Um 1900: Henri Poincaré: „Bewegung von zwei Planeten um Sonne können sehr komplizierte Bahnen haben.“ (chaotische Bahnen)

Seit ca. 1970 Entwicklung der Chaostheorie basierend auf numerischen Berechnungen.

Allgemein: Im Alltag tritt sehr komplexes Verhalten auf: 1. Komplexe Systeme mit vielen Teilchen und Parametern 2. Einfache Systeme mit sehr komplizierten Bewegungen (Bahnen).

In der Vorlesung: Einfach Systeme mit einfachen (z.B. periodische) Bahnen. Vorlesung erweckt falschen Eindruck (z.B. Vorhersagbarkeit der Bahnen).

Bewegungen, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, sind zuverlässig berechenbar. Lineare Differentialgleichung $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$. Die Gleichung ist eine lineare Kombination der Ableitungen von $x(t)$.

Nichtlineare Differentialgleichung z.B.: $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}^2(t) + \sin(x(t)) = F(t)$. Es treten nichtlineare Verknüpfungen der Ableitungen von $x(t)$ auf.

Bei nichtlinearen Differentialgleichungen können chaotische Bewegungen auftreten. **Vorhersagen über längere Zeiten sind nicht möglich.**

Versuch: Doppelpendel

Bei kleinen Auslenkungen laufen beide Pendel fast gleich. Kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen verursachen kleine Änderungen der Bahnkurve.

Bei großen Auslenkungen anfänglich ähnlich, später vollkommen verschiedene Bahnen. Kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen vergrößern sich mit der Zeit sehr stark. (chaotisches Verhalten)

Langfristige Vorhersagen sind nicht möglich, da die Anfangsbedingungen nicht beliebig genau bekannt sind.

7.1 Aufgabe des Determinismus in der Physik

Zu jedem Satz von Anfangsbedingungen $(\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2)$ gehört genau eine Bahnkurve.

Durch die Anfangsbedingungen ist die Bahnkurve alle Zeite festgelegt. Kenntnis der Anfangsbedingungen ist limitiert! 1. Experimenteller Fehler beim Messen der Anfangsbedingungen 2. Heisenbergs Unschärferelation limitiert prinzipiell:

$$\Delta x_1 \cdot \Delta v_1 \geq \hbar/m$$

$$\Delta\phi_1 \cdot \omega_1 \geq \hbar/J$$

Bei linearen Differentialgleichungen wächst eine Abweichung $(\Delta\phi_1, \Delta\omega_1, \Delta\phi_2, \Delta\omega_2)$ gegenüber einer anderen Bahnkurve lineare mit der Zeit an.

Bei chaotischem Verhalten wächst die Abweichung $\delta = (\Delta\phi_1, \Delta\omega_1, \Delta\phi_2, \Delta\omega_2)$ exponentiell mit der Zeit an:

$$|\delta(t)| = e^{\lambda t}|\delta(0)|$$

λ: Ljapunov-Exponent

7.2 Darstellung im Phasenraum

Der komplette Satz von Anfangsbedingungen $(\phi_1, \omega_1, \phi_2, \omega_2)$ wird als Vektor im Phasenraum aufgefasst (hier vierdimensional).

Beispiel: normales Fadenpendel: Anfangsbedingungen: (ϕ, ω). Phasenraum ist zweidimensional. Gut graphisch darstellbar. Punkt im Phasenraum ist vollständige Angabe der Anfangsbedingung. Jede Anfangsbedingung hat ihre zugehörige Bahn.

Systeme mit Reibung (Dissipative Systeme)

Beispiel: gedämpftes Pendel

Bahnkurve strebt gegen $\phi = 0$ und $\omega = 0$. Im Phasenraum strebt die Bahn gegen den Punkt (0,0). Solche Punkte nennt man Fixpunkte. Es gibt weitere Fixpunkte: (2π,0) und (4π,0) und (6π,0)...

Anfangsbedingung = Fixpunkt (keine Bewegung).

Die Punkte (π,0) und (3π,0) etc. sind auch Fixpunkte, aber instabil.

Kleinste Differenzen in den Anfangsbedingungen in seiner Nähe auf verschiedenen Bahnen.

Stabile Fixpunkte haben ein Einzugsgebiet. Alle Bahnen mit Anfangsbedingungen in dem Einzugsgebiet führen letztendlich zu dem Fixpunkt.

Man nennt sie auch Attraktor.

Periodisch angeregetes mathematisches Pendel mit Reibung (Dissipatives System)

1. Linearisiert ($\sin\phi \approx \phi$):

$$\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = K\cos(\omega_A t)$$

Verhält sich wie erzwungenes Fadenpendel. Kein Chaos, da lineare Differentialgleichung. Periodische Schwingung nach Einschwingvorgang.

Phasenraum ist hier sogar dreidimensional wegen der zeitabhängig äußeren Kraft. Die Kraft (Drehmoment) am Pendel ist abhängig von drei Größen:

$$M = M(\phi, \dot{\phi}, t)$$

Attraktor im 3D Phasenraum: Spirale entlang Zeit-Achse. Nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega_A}$ sind ϕ, ω und äußere Kraft wieder gleich.

Poincaré-Schnitt:

Darstellung nur von einem Schnitt durch den Phasenraum bei Zeiten $t + nT$. Eine periodische Bewegung ist nur noch ein Punkt in einem Poincaré-Schnitt.

Vorteil dieser Darstellung: Vereinfachung:

Periodische Bewegung: Punkt. Chaotische Bewegung: ?.

Chaos ist möglich, wenn Differentialgleichung nichtlinear und Dimension des Phasenraums ≥ 3 ist.

Periodisch angeregtes mathematisches Pendel mit Reibung:

$$\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = K\cos(\omega_A t)$$

Nichtlineare Differentialgleichung. Dimension des Phasenraums = 3. Chaos ist möglich. 04.12.01

Bei großen Auslenkungen (mit Überschlag) tritt Chaos auf.

Einfach nichtlineare Systeme (einfache Dgls) zeigen komplizierte Bewegungen und folgen (verborgenen) komplizierten Mustern.

7.3 Seltsame Attraktoren

Der Attraktor ist weder eine Linie (1-dimensional) noch eine Fläche (2-dimensional), sondern etwas dazwischen.

Er setzt sich aus mehr als abzählbar unendlich vielen verschlungengen Linien zusammen und besitzt eine **fraktale Dimension**.

Attraktoren mit fraktaler Dimension nennt man **seltsame Attraktoren**.

7.4 Fraktale Dimension

Definition einer Dimension:

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{lnN(\epsilon)}{ln(1/\epsilon)}$$

N = 2

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{ln2}{ln(1/\epsilon)} = 0$$

$N \propto 1/\epsilon$

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{ln(1/\epsilon)}{ln(1/\epsilon)} = 1$$

$N \propto 1/\epsilon^2$

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{ln(1/\epsilon^2)}{ln(1/\epsilon)} = 2$$

Einzugsgebiet von Attraktoren

Beispiel: Pendel über Magneten

Es gibt 3 stabile Fixpunkte über den Magneten (Attraktoren). Das Einzugsgebiet ist jeweils eine 2-dimensionale Fläche. Bahnen zu Anfangsbedingungen innerhalb des Gebietes enden am Fixpunkt. Die Grenze zwischen den Einzugsgebieten hat eine fraktale Dimension.

Beispiel: gedämpftes Doppelpendel

Pendel hängt nach unten: stabiler Fixpunkt. Die Punkte $\phi_1 = n_1 \cdot 2\pi$ und $\phi_2 = n_2 \cdot 2\pi$ sind Attraktoren. Einzugsgebiete dieser Fixpunkte haben fraktrale Begrenzung.

7.5 Selbstähnlichkeit

Vergrößerung eines kleinen Ausschnittes einer fraktalen Struktur. Kleine Details sind ähnlich zu größeren Strukturen. Details der Details sind wieder ähnlich...

7.6 Weg ins Chaos

Praktisch ist es von großer Bedeutung zu wissen, wann ein System von periodischem Verhalten in chaotisches Verhalten übergeht.

Beispiel: Herzkammerflimmern: Herzschlag = periodisch; Flimmern = chaotisch

Fragestellung: Wie kann der Arzt feststellen, wie nahe der Patient am Herzkammerflimmern (lethal) ist?

Übergang passiert bei Änderung eines Systemparameters. Beispiel Pendel (Paramter γ, K, ω_A).

Anzeichen für die Nähe zum Chaos ist eine Periodenverdopplung (**Bifurkation**).

Beispiel: Vermehrung von Heuschrecken

Bei ausreichendem Futterangebot wächst eine Population N Heuschrecken im Jahr n auf eine Population im nächsten $N_{n+1} = AN_n$.

Ist das Futterangebot jedes Jahr gleich, stirbt vor der Ei-Ablage ein gewisser Anteil der Heuschrecken wegen Futtermangels aus. Futtermangel ist proportional zur aktuellen Popilation:

$$N_{n+1} = AN_n(1 - bN_n)$$

Setze $x = bN \leq 1$:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$$

Das System besitzt nur einen Parameter A:

Kleines A: stabiles Gleichgewicht bei bestimmter Population größeres A: periodische Schwankungen: gute Jahre - schlechte Jahre großes A: Chaotische Schwankungen in der Population

Beispiel: tropfender Wasserhahn

Bei kleinem Wasserfluss: periodisches Tropfen. Mit zunehmendem Fluss Periodenverdopplung (Bifurkation), dann chaotisches Verhalten. 05.12.01

7.7 Elastizität fester Körper

Mikroskopischer Aufbau eines Festkörpers: Atome sind an Nachbaratome gebunden. Bindung zwischen zwei Atomen in der Nähe der Gleichgewichtslage:

$$E_{pot} \propto (r - r_0)^2$$

Die Kraft ergibt sich zu

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}E_{pot}$$

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}r} \propto -2(r - r_0) = -2\Delta r$$

Die Kompensationskraft um einen Stab zu dehnen ist analog:

$$F \propto q\frac{\Delta L}{L}$$

q: Querschnittsfläche L: Länge des Stabes F steht senkrecht auf q.

Die Proportionalitätskonstante E nennt man **Elastizitätsmodul**.

$$F = Eq\frac{\Delta L}{L}$$

Einheit: $[E] = \frac{N}{m^2}$

Man führt die **Zugspannung** (Zugkraft pro Fläche) ein:

$$\sigma = \frac{F}{q}$$

Einheit: $\sigma = \frac{N}{m^2}$

Die Zugspannung hat umgekehrtes Vorzeichen wie der Druck:

$$p = -\sigma$$

Hooke'sches Gesetz: Eine Längenänderung erfordert die Zugspannung

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}$$

- $\Delta L > 0$: Stab wird länger (L wird größer), σ ist positiv

- $\Delta L < 0$: Stab wird kürzer, σ ist negativ, $\rightarrow$ Druck

Bei zunehmender Längenänderung wird Kraft nichlinear (P). Danach wird die Verformung irreversibel: Fließgrenze (F) und der Körper zerreist (Zerreißgrenze Z).

Bei der Dehnung eines Stabes wird dieser schmaler: Die relative Dickenänderung ist:

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{\Delta L}{L}$$

Mit der **Poissonzahl** μ (= **Querkontraktion**). (Wird der Stab dünner ist Δd positiv).

Die Volumenänderung berechnet sich zu:

$$\Delta V = (d - \Delta d)^2(L + \Delta L) - d^2 L = d^2 \Delta L - 2d\Delta dL - \underbrace{2d\Delta d\Delta L + \Delta d^2 L + \Delta d^2 \Delta L}_{klein}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} - 2\frac{\Delta d}{d}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E}(l - 2\mu)$$

Das Volumen wird größer bei einer Zugspannnung.

7.8 Körper von allen Seiten unter Druck

Druck auf Stirnseiten verursacht Längenänderung

$$\frac{\Delta L_1}{L} = -\frac{p}{E}$$

Druck auf ein Längsseitspaar vergrößert Länge wegen Querbeeinflussung:

$$\frac{\Delta L_2}{L} = \mu \frac{\Delta d}{d} = +\mu \frac{p}{E}$$

Die Längenänderung insgesamt ist also Stirnseite + 2 Längsseitenpaare:

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{p}{E}(1 - 2\mu)$$

Gleiches gilt für die Längsseiten:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{p}{E}(1 - 2\mu)$$

Druck auf Seitenflächen in x-Richtung verursacht Längenänderung: (ΔL positiv, wenn Länge größer wird):

$$\frac{\Delta L'_x}{L_x} = -\frac{p}{E}$$

Druck auf Seitenflächen in y-Richtung vergrößert Länge wegen Querbeeinflussung

$$\frac{\Delta L''_x}{L_x} = +\mu \frac{p}{E}$$

Druck auf Seitenflächen in z-Richtung ebenso.

Die Längenänderung insgesamt durch Druck auf Seitenflächen in x-Richtung plus Druck auf Seitenflächen in y-Richtung und z-Richtung:

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L'_x}{L_x} + 2\frac{\Delta L''_x}{L_x} = -\frac{p}{E}(1-2\mu)$$

Die Volumenänderung bei allseitigem äußerem Druck ist dann:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} - 2\frac{Deltad}{d} = -\frac{3p}{E}(1-2\mu)$$

Man definiert das **Kompressionsmodul** K:

$$p = -K\frac{\Delta V}{V}$$

Und die **Kompressibilität** κ:

$$\kappa = \frac{1}{K}$$

Die oberste Gleichung liefert den Zusammenhang:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E}(1-2\mu)$$

$$\Delta V = (L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y)(L_z + \Delta L_z) - L_x L_y L_z = \Delta L_x L_y L_z + L_x \Delta L_y L_z + L_x L_y \Delta L_z + \underbrace{O(\Delta L^2)}_{kleineTerme}$$

bei allseitigem Druck ist dann:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = -3\frac{p}{E}(1-2\mu)$$

Man definiert das **Kompressionsmodul** K:

$$p = -K\frac{\Delta V}{V}$$

Und die **Kompressibilität** κ:

$$\kappa = \frac{1}{K}$$

Die oberste Gleichung liefert den Zusammenhang:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E}(1-2\mu)$$

Bisher waren Kräfte senkrecht auf Außenflächen eines Quaders. Kräfte tangential an einer Seitenfläche heißen **Scherungskräfte**. Man bezeichnet die Tangentialkradt pro Fläche:

$$\tau = \frac{F}{q}$$

als **Schubspannung** bzw. **Scherspannung**.
Bei einem Würfel: q: Fläche einer Seite
Bei kleinen Winkeln ist die Scherspannung proportional zum Verkippungswinkel α.

$$\tau = G\alpha$$

Die Proportionalitätskonstante nennt man **Schubmodul** bzw. **Schermodul** oder auch **Torsionsmodul**.
Man kann zeigen, dass:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu$$

und

$$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}$$

7.9 Torsion eines Drahtes

Die Torsion kann als Scherung der einzelnen Fadern aufgefasst werden. Der Verkippungswinkel α ist näherungweise:

$$\alpha = \frac{r\phi}{L}$$

Die dafür erforderliche Scherspannung:

$$\tau = G\frac{r\ \phi}{L}$$

ist für alle Fasern in dem Zylindermantel gleich. Das dafür erforderliche Drehmoment ist:

$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}F = r(\tau 2\pi r\mathrm{d}r) = G\frac{2\pi r^3\phi}{L}$$

$$M = \frac{2\pi G\phi}{L}\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{L}\phi$$

06.12.01

7.10 Biegung von Balken

Bei einem Bogenradius r wird die Länge einer Faser bei z:

$$(r+z)\phi$$

Die Längenänderung gegenüber der neutralen Faser ist:

$$\Delta L(z) = z\phi = L\frac{z}{r}$$

Dazu ist eine Zugspannung notwendig von

$$\sigma(z) = E\frac{z}{r}$$

Oben ist σ positiv, unten negativ (Druck p). $\rightarrow$ Drehmoment bei z = 0:

$$\mathrm{d}M(z) = z\mathrm{d}F(z) = z\sigma(z)b\mathrm{d}z$$

$$M = \frac{bE}{r}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2\mathrm{d}z = \frac{Ed^3b}{12r}$$

Die äußere Kraft F_0 am Balkenende bewirkt das Drehmoment.

$$M = F_0(L-x)$$

Bei x erhält man also den Biegradius:

$$\frac{Ed^3b}{12F_0(L-x)} = r$$

Folgt man der Krümmung erhält man am Balkenende die Auslenkung:

$$s = \frac{-4L^3}{Ed^3b} F_0$$

Die stärkste Krümmung (kleinster Radius) ist bei $x = 0$. Die stärkste Spannung ist dort an der Oberseite des Balkens ($z = d/2$).

$$\sigma = E\frac{z}{r} = \frac{6F_0L}{d^2b}$$

Der Balken bricht, wenn die Zerreißspannung überschritten wird.

Träger mit beliebigem Querschnitt:

Ganz ähnlich zu dem Volumenintegral bei Berechnung des Trägheitsmoments:

$$J = \rho \int r^2 \mathrm{d}V$$

tritt hier das Flächenintegral über die Querschnittsfläche des Trägers auf:

$$B = \int\int z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Der Wert B wird daher **Flächenträgheitsmoment** oder **Biegemoment** genannt.

Die Durchbiegung des einseitg eingespannten Trägers ist dann einfach:

$$x = \frac{L^3}{3EB} F_0$$

Elastische Energie

Aufzuwendende Arbeit bei der Dehnung eines Stabes:

$$W = \int\limits_0^{\Delta L} \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_0^{\Delta L} q\sigma \mathrm{d}s = \int\limits_0^{\Delta L} qE\frac{s}{L}\mathrm{d}s$$

$$W = \frac{1}{2}qE\frac{s^2}{L}\|_{s=0}^{s=\Delta L} = \frac{1}{2}qE\frac{(\Delta L)^2}{L}$$

Erweitern mit L:

$$W = \frac{1}{2}qLE\frac{(\Delta L)^2}{L^2} = \frac{1}{2}VE\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$$

Die elastische Energie ist im Volumen V gespeichert (EM-Feldenergie)

$$E_{elast} = \frac{1}{2}VE\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$$

8 Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik)

Flüssigkeitsschichten sind frei gegeneinander verschiebbar. Keine Rückstellkräfte bei Scherung, Torsion; Reibungskräfte sind möglich (Viskosität!). Nur Volumenänderung liefert Rückstellkraft. Unter Druck p erfolgt eine Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p$$

κ: Kompressibilität
Ideale Flüssigkeiten: keine Reibung, keine Oberflächeneffekte.

An der Oberfläche treten keine Tangentialkräfte auf. Die Flüssigkeit hat eine Masse (Dichte); dadurch Gewichtskräfte. An Wänden von Behältern keine Tangential-, nur Normalkräfte.

Ruhende Behälter: $\vec{F}_N = \vec{F}_G = m\vec{g}$ Rotierender Behälter: $\vec{F}_Z = m\omega^2 r$, $\vec{F}_N = \vec{F}_G + \vec{F}_Z$, $\vec{F}_G = m\vec{g}$.

$$\tan\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

$$z(r) = \int_0^r \frac{\omega^2 r^2}{g}\mathrm{d}r' = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z(0)$$

Die Oberfläche ist ein Paraboloid. Anwendung: Herstellung von Parabolspiegeln.

8.1 Kraft auf eine Flüssigkeitselement

Flüssigkeitselement: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Die Kraft auf die linke Seite ist.

$$F_x = p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Die Kraft auf die rechte Seite:

$$F_x = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Summe beider Kräfte:

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Analog für y und z-Komponente (ohne Schwerkraft):

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)^T \mathrm{d}V = -\mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$$

Der Druck ist eine skalare Größe! 07.12.01

8.2 Kraft auf ein Flüssigkeitselement mit Dichte ρ

Gesamtkraft auf das ruhende Element kompensiert seine Gewichtskraft:

$$\vec{F} = (0, 0, g\rho\mathrm{d}V)^T = -\mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}V$$

Es folgt

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

Integration liefert:

$$p(z) = \int_z^h \rho\, g\, \mathrm{d}z = \rho\, g\, (h - z)$$

Der Druck nimmt linear mit der Tiefe zu. Er wirkt auch auf die Seitenwände.
Die Flüssigkeit ruht, wenn Gesamtkraft = 0.
Es folgt

$$\mathrm{grad}\, p = 0$$

(homogene Dichte)
Die Kraft auf alle Seitenflächen ist gleich. In einer schwerelosen, ruhenden Flüssigkeit ist der Druck überall gleich. Bei Druck p treten Kräfte auf alle Gefäßwände auf.

$$\vec{F}_1 = p\, \vec{A}_1$$
$$\vec{F}_2 = p\, \vec{A}_2$$
$$\vec{F}_3 = p\, \vec{A}_3$$

$\vec{A}_i$: Flächenvektoren (Normalvektoren auf die entsprechenden Flächen)

8.3 Auftrieb

Der Druck auf die linke / rechte und vordere / hintere Seite ist jeweils gleich (Kräftgleichgewicht).
Der Druck auf die obere Seite ist kleiner als auf die untere Seite. Druckdifferenz:

$$\Delta p = \rho_{Fl}\, g\, H$$

Dadurch wirkt eine Kraft nach oben:

$$F = \rho_{Fl}\, g\, H\, A = \rho_{Fl}\, g\, V$$

(negative Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit)
Dem entgegen wirkt die Gewichtskraft des Körpers (nach unten):

$$F_G = mg = \rho_A\, V\, g$$

Der resultierende Auftrieb ist (nach oben):

$$F_A = (\rho_{Fl} - \rho_K)\, V\, g$$

8.4 Oberflächen realer Flüssigkeiten

An der Oberfläche fehlen Nachbaratome. Dadurch bleibt eine resultierende Kraft ins Innere. Man muss Arbeit verrichten, um Teilchen an die Oberfläche zu bringen (nicht aber beim Austausch). Es kostet Energie, die Oberfläche einer Flüssigkeit zu vergrößern.
Die Energie pro Fläche heißt **spezifische Oberflächenenergie**:

$$\epsilon = \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Um die Oberfläche zu vergrößern braucht man eine Kraft. (Film hat zwei Oberflächen):

$$\Delta W = F\, \Delta s = \sigma\, 2L\, \Delta s = \sigma\, \Delta A$$

Die Zugspannung heißt **Oberflächenspannung**:

$$\sigma = \frac{F}{2L}$$

8.5 Druck in einem Wassertropfen

Oberflächenenergie:

$$E = \epsilon\, A = 4\pi\, r^2\, \epsilon$$

Arbeit bei Größenänderung:

$$\Delta W = F\Delta s = pA\Delta s = p\Delta V$$

$$\Delta W = \rho 4\pi r^2 \Delta r$$

Änderung der Oberflächenenergie:

$$\Delta E = 4\pi((r+\Delta r)^2 - r^2)\epsilon$$

$$\Delta E = 4\pi(2r\Delta r + \underbrace{(\Delta r)^2}_{klein})\epsilon$$

Gleichsetzen liefert:

$$p = \frac{2\epsilon}{r}$$

Bei Seifenblasen: Wegen Innen- und Außenfläche doppelte Oberflächenenergie.

$$p = \frac{4\epsilon}{r}$$

9 Schwingungen und Wellen

19.12.01

Funktion, die eine harmonische Welle beschreibt:

$$A(t,x) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

Sie ist Lösung der Wellengleichung:

$$\frac{\partial A}{\partial t^2} = v^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)}_{Laplaceoperator}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle: $v = \frac{\omega}{k}$.
Herleitung der Wellengleichung für Schallwellen aus der Eulergleichung und Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)$$

Schallgeschwindigkeit hängt nicht vom Druck aber von der Temperatur ab.
Ebene Wellen:

$$p(t,\vec{r}) = p_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot r) + p_m$$

Wellenzahlenvektor zeigt in Ausbreitungsrichtung. Ebenen, die senkrecht auf $\vec{k}$ stehen, haben die gleiche Phase, weil das Skalarprodukt den selben Wert liefert.

In karteisishcen Koordinaten:

9.1 Intensität einer Welle

Wellen transportieren Energie und Impuls.

Bei mechanischen Wellen liegt die Energie als potentielle Energie (Druckarbeit) und kinetisch Energie (Beweung der Moleküle) vor.

Die Energie wird auf Nachbarmoleküle übertragen (Transport).

Potentielle Energie:

Die Druckarbeit zur Druckänderung von p_m auf $p_m + p_0$ ist:

$$\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V$$

mit

$$\mathrm{d}V = -\kappa V \mathrm{d}p$$

$$\Delta W = E(p_m + p_0) - E(p_m) = \kappa V \int_{p_m}^{p_m+p_0} p\mathrm{d}p$$

$$\Delta W = \kappa V \frac{1}{2} p^2 |_{p_m}^{p_m+p_0} = \frac{1}{2}\kappa V (p_0^2) + 2p_0 p_m)$$

Im Wellental analog:

$$\Delta W = E(p_m - p_0) - E(p_m) = \kappa V \int_{p_m}^{p_m-p_0} p\mathrm{d}p$$

$$\Delta W = \kappa V \frac{1}{2} p^2 |_{p_m}^{p_m-p_0} = \frac{1}{2}\kappa V (p_0^2) - 2p_0 p_m)$$

Die Gesamtenergie setzt sich aus potentieller und kinetischer Energie zusammen. Die mittlere potentielle Energie ist gleich der mittleren kinetischen Energie

$$\bar{E}_{pot} = \frac{1}{4}\kappa V P_0^2 \Rightarrow \bar{E}_{ges} = \frac{1}{2}\kappa V p_0^2$$

Die Energiedichte ist

$$\frac{\bar{E}_{ges}}{V} = \epsilon = \frac{1}{2}\kappa p_0^2$$

Definition: Intensität ist die Energie, die pro Zeiteinheit auf eine Einheitsfläche tritt.

Die Energie im Volumen V ist:

$$\Delta E = V\epsilon = v\Delta t A \frac{1}{2}\kappa p_0^2$$

Sie tritt in der Zeit Δt durch die Fläche A

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t A} = v\frac{1}{2}\kappa p_0^2$$

Die Intensität einer Welle ist im Allgemeinen proportional zum Amplitudenquadrat.

9.2 Kugelwellen

Wellen, die von einer Punktquelle ausgehen. Druckschwankungen an einem Punkt $\vec{r}_0$ breiten sich als Wellen in alle Raumrichtungen gleichermaßen aus. Am Punkt $\vec{r}_0$ wird die Leistung P (Druckarbeit pro Zeiteinheit) verrichtet und als Welle abgestrahlt. Mit zunehmendem Abstand von der Quelle verteilt sich die Energie auf eine immer größer werdende Fläche

$$P = I(r)4\pi r^2$$

$$\Rightarrow I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Berechnung der Amplitude als Funktion vom Abstand

$$\frac{P}{4\pi r^2} = v\frac{1}{2}\kappa p_0^2(r) \Rightarrow p_0(r) \propto \frac{1}{r}$$

Ansatzfunktion für eine harmonische Kugelwelle

$$p(t,\vec{r}) = \frac{p_0}{r}\sin(\omega t - kr) + p_m$$

Die Wellenzahl k ist hierbei ein Skalar und wird mit dem Betrag von r multipliziert (kein Skalarprodukt).

Flächen gleicher Phase sind Kugelflächen.

9.3 Huygen'sches Prinzip

Ebene Welle erzeugt an einem Einfachspalt periodische Druckschwankungen → Ausbildung einer Kugelwelle.

Anfangs sind die Druckschwankungen in der ganzen yz-Ebene in Phase (Ausbreitung in x-Richtung), nach dem Passieren des Spaltes, werden die Druckschwankungen seitlich des Spaltes von der Wand ausgeblendet → Kugelwelle.

9.4 Reflexion

Der Druck vor der Wand kann nur nach hinten ausweichen, da an der Wand gilt: $v_x(t) = 0$.

9.5 Schräger Einfall bei Reaktion

Parallel zur Wand keine Behinderung der Ausbreitung; Die Komponente des Wellenzahlvektors senkrecht zur Wand kehrt sich um. Wellenzahlvektor parallel zur Oberfläche bleibt erhalten.

Einfallende Welle: $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

Ausfallende Welle: $\vec{k'} = (-k_x, k_y, k_z)$

Einfallswinkel = Ausfallswinkel

9.6 Stehende Wellen

1. Laufende Schallwellen: Phase zwischen p und u_x bei Ausbreitung nach rechts: 0, nach links: π, stehende Welle: $\frac{1}{2}\pi$ Phasendifferenz.

Stehende Wellen sind aus entgegengesetzt laufenden Wellen zusammengesetzt.

$$p(t,\vec{r}) = p_0\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + p_0\sin(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi) + p_m$$

$$p(t,\vec{r}) = 2p_0\sin(\omega t - \frac{\phi}{2})\cos(...)$$

20.12.01

Inhaltsverzeichnis