Elektrodynamik

Zusammenfassung von Leonard Burtscher
Kommentare bitte an leo@ileo.de

1. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Der Gauß'sche Integralsatz

In einem beliebigen Vektorfeld $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ ist das Integral über eine geschlossene Fläche A gleich dem Integral des Skalarfeldes $\nabla\vec{F}$ über das von A eingeschlossene Volumen V:

$$\int_V \nabla\vec{F}\,\mathrm{d}V = \oint_A \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{f} \tag{1}$$

Anwendungsbeispiel

$$\oint_A \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_V \nabla\vec{E}\mathrm{d}V = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0}Q \tag{2}$$

Gauß'sches Gesetz für elektrische Felder

1.2 Der Stokes'sche Integralsatz

Das Linienintegral des Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ längs einer geschlossenen Kurve C ist gleich dem Integral des Vektorfeldes $\nabla \times \vec{F}$ über die von C umrandete Fläche A:

$$\oint_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_A \nabla \times \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{f} \tag{3}$$

Stoke'scher Integralsatz

1.3 Vektoranalysis

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) \tag{4}$$

$$\nabla(\nabla \times \vec{v}) = 0 \tag{5}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \tag{6}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla\vec{v}) - \Delta\vec{v} \tag{7}$$

2 Elektromagnetische Grundlagen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0 \tag{8}$$

Kontinuitätsgleichung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{9}$$

$$\omega = ck \tag{10}$$

Dispersionsrelation

3 Die Maxwell'schen Gleichungen

3.1 Integralform

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = Q \tag{11}$$

Gauß'sches Gesetz für elektrische Felder

$$\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{f} = 0 \tag{12}$$

Gauß'sches Gesetz für magnetische Felder

$$\oint_C \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{f} \tag{13}$$

Induktionsgesetz

$$\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_F (\vec{j} + \dot{\vec{D}})\,\mathrm{d}\vec{f} \tag{14}$$

Ampère'sches Gesetz

3.2 Differentialform

$$\nabla\vec{D} = \rho \tag{15}$$
$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{16}$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{17}$$
$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{18}$$

3.3 Anmerkungen

- Im Vakuum gilt: $\mathbf{\vec{D}} = \epsilon_{\mathbf{0}}\mathbf{\vec{E}}$ und $\mathbf{\vec{H}} = \frac{\mathbf{1}}{\mu_{\mathbf{0}}}\mathbf{\vec{B}}$
- In $\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ bezeichnet man $\vec{j}$ als **Leitungsstrom** und $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ als **Verschiebungsstrom**.

4 Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = \int (\overbrace{\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}}^{Lorentz-Kraftdichte\,\vec{f}}) \,\mathrm{d}^3x \tag{19}$$

Lorentz-Kraft

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \tag{20}$$

Lorentz-Kraftdichte

5 Potentiale

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \tag{21}$$

elektrisches Potential Φ

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \tag{22}$$

Magnetisches Vektorpotential $\vec{A}$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{23}$$

In Lorentz-Eichung

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \nabla(\nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}) = -\mu_0\vec{j} \tag{24}$$

5.1 Eichungen

5.1.1 Lorentz-Eichung

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \tag{25}$$

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \dot{\Lambda} \tag{26}$$

$$\nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0 \tag{27}$$

Lorentz-Eichung

mit dem Wellenoperator

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{28}$$

werden (23) und (24) zu

$$\Box\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{29}$$

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \tag{30}$$

Falls

$$\nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = \chi \neq 0 \tag{31}$$

$$\Box\Lambda = -\chi \tag{32}$$

Im stationären Fall wird der Wellenoperator $\Box$ zum Laplaceoperator Δ und (23) und (24) werden zu

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{33}$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \tag{34}$$

5.1.2 Coulomb-Eichung (transversale Eichung)

$$\nabla \vec{A} = 0$$

Damit vereinfachen sich (23) und (24) zu

$$\Box \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{35}$$

$$\Box \vec{A} - \nabla \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = -\mu_0 \vec{j} \tag{36}$$

bzw. im stationären Fall

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{37}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{38}$$

6 Erhaltungssätze

6.1 Energie

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{39}$$

Poynting-Vektor

$$\vec{H}\dot{\vec{B}} + \vec{E}\dot{\vec{D}} + \vec{E}\vec{j} + \nabla \vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}\right) + \vec{E}\vec{j} + \nabla \vec{S} = 0 \tag{40}$$

Poynting'scher Satz

Die einzelnen Summanden sind folgendermaßen zu interpretieren:

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} \tag{41}$$

Gesamtenergiedichte u des Feldes

$$\vec{E}\vec{j} \tag{42}$$

Joule'sche Wärmeverluste

$$\nabla\vec{S} \tag{43}$$

Energiestromdichte

Der Energieerhaltungssatz lautet dann in integraler Schreibweise

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V u \,\mathrm{d}V = \oint_A \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{f} + \int_V l \,\mathrm{d}V \tag{44}$$

mit

$$l := \vec{E}\rho\vec{v} = \vec{E}\vec{j} \tag{45}$$

In differentieller Schreibweise:

$$-\frac{\partial}{\partial t}u = \nabla\vec{S} + l \tag{46}$$

6.2 Feldimpuls

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})\,\mathrm{d}V \tag{47}$$

$$\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{c^2}\vec{S} \tag{48}$$

Impulsdichte $\vec{g}$

$$\vec{G} = \int_V \vec{g}\,\mathrm{d}V = \int_V \vec{D}\times\vec{B}\,\mathrm{d}V \tag{49}$$

Gesamtimpuls $\vec{G}$

$$T_{ik} = u\delta_{ik} - \epsilon_0 E_i E_k - \frac{1}{\mu_0}B_i B_k = \epsilon_0(E_i E_k - \frac{1}{2}\vec{E}^2\delta_{ik}) - \frac{1}{\mu_0}(B_i B_k - \frac{1}{2}\vec{B}^2\delta_{ik}) = T_{ki} \tag{50}$$

Maxwell'scher Spannungstensor (symmetrisch)

$$\dot{\vec{P}} + \dot{\vec{G}} + \oint_S \hat{T}\vec{n}\,\mathrm{d}f = 0 \tag{51}$$

Impulserhaltungssatz (integrale Schreibweise) worin

$$\oint_S \hat{T}\vec{n}\,\mathrm{d}f \tag{52}$$

der gesamte pro Zeiteinheit durch $\mathrm{d}f$ strömende Impuls ist.

$$\dot{\vec{p}} + \dot{\vec{g}} + \nabla\hat{T} = 0 \tag{53}$$

Impulserhaltungssatz (integrale Schreibweise) worin

$$\nabla\hat{T} \tag{54}$$

die Kraftdichte ist.

6.3 Drehimpuls

$$\vec{l}_m = \vec{x} \times \vec{p} \tag{55}$$

Drehimpulsdichte der Materie in V (analog zu $\vec{p}$) mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ zum Mittelpunkt von V

$$\vec{l}_f = \vec{x} \times \vec{g} \tag{56}$$

Drehimpulsdichte des Feldes (analog zu $\vec{g}$)

$$\vec{M} = \vec{x} \ \times \hat{T} \tag{57}$$

Drehimpulsstromdichte

Zu den jeweiligen Gesamt-Größen kommt man durch Integration über V.

$$\dot{\vec{l}}_m + \dot{\vec{f}}_m + \nabla M = 0 \tag{58}$$

Drehimpulserhaltungssatz

7 Randbedingungen an Grenzflächen

$$D_{\perp 1} - D_{\perp 2} = \sigma \tag{59}$$
$$B_{\perp 1} - B_{\perp 2} = 0 \tag{60}$$
$$E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2} = 0 \tag{61}$$
$$H_{\parallel 1} - H_{\parallel 2} = \kappa \tag{62}$$

bzw. in Vektoren:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \tag{63}$$
$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{64}$$
$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{65}$$
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{E}_H) = \kappa \tag{66}$$

8 Elektrostatik

aus

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \tag{67}$$

und

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{68}$$

erhält man die Potentialgleichung:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{69}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' \tag{70}$$

9 Magnetostatik (Magnetfelder mit $\dot{\vec{j}} = 0$)

$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{71}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{72}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{73}$$

Potentialgleichung (in Coulombeichung):

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{74}$$

Lösung der Potentialgleichung:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3 x' \tag{75}$$

Und damit erhält man das Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \, \mathrm{d}^3 x' = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\mathrm{d}\vec{l'} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \tag{76}$$

10 Elektromagnetisches Feld in Materie

$$\vec{E}_{diel} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} \tag{77}$$

$$\rho_p = -\nabla \vec{P}(\vec{x}) \tag{78}$$

Polarisationsladungdichte (mit $\vec{P}$: Polarisation = Volumendipoldichte)

$$\nabla \vec{E}_{diel} = \frac{\rho - \nabla \vec{P}}{\epsilon_0} \tag{79}$$

$$\nabla \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E}_{diel} + \vec{P})}_{=\vec{D}_{diel}} = \rho \tag{80}$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}_0 \tag{81}$$

Magnetisierung $\vec{M}$ mit magnetischer Suszeptibilität χ und magnetischer Feldstärke im Vakuum $\vec{H}_0$

$$\vec{B}_{diel} = \mu_0(\vec{H}_0 + \chi \vec{H}_0) = \mu_0 \vec{H}_0 (1 + \chi) \tag{82}$$

$$\mu_r = 1 + \chi \tag{83}$$

relative Permeabilität μ_r

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \tag{84}$$

11 Ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = 0 \tag{85}$$

Vektorpotential in Coulomb-Eichung ($\nabla \vec{A} = 0$)

$$< u >= \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}_0^2 \tag{86}$$

Energiedichte

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = cu\vec{n} \tag{87}$$

Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

$$\vec{A} = \underbrace{\vec{A}_1 f_1(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}_{in\,\vec{k}-Richtung} + \underbrace{\vec{A}_2 f_2(\vec{k}\vec{x} + \omega t)}_{in\,-\vec{k}-Richtung} \tag{88}$$

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$v_P = \frac{\omega}{k} \geq c \tag{89}$$

$$v_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \leq c \tag{90}$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Informationen werden mit der Gruppengeschwindigkeit übertragen.

12 Retardierte Potentiale

$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \tag{91}$$

Retardierte Zeit

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' \tag{92}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, \mathrm{d}^3x' \tag{93}$$

Retardierte Potentiale