Der Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Von den physikalischen Grundlagen zu den Einsteinschen Feldgleichungen

Leonard Burtscher

Januar 2004

Die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins (ART) basiert auf drei grundlegenden physikalischen Prinzipien. Diese sind das Machsche Prinzip, das Äquivalenzprinzip und das Prinzip der Kovarianz. Ersteres besagt, was später als Folge der Einsteinschen Feldgleichungen deutlich wird, dass die Verteilung der Materie die Geometrie der Raum-Zeit bestimmt. Natürlich kann man die Feldgleichungen nicht aus den Feldgleichungen herleiten (Zirkelschluss), weswegen das Machsche Prinzip auch mehr als „Wunsch“interpretiert werden muss. Die Gleichungen sollen so aussehen, dass das Machsche Prinzip erfüllt wird. Das Äquivalenzprinzip besagt die Proportionalität von träger und schwerer Masse und das Prinzip der Kovarianz fordert, dass die Gleichungen der Physik in allen Koordinatensystemen dieselbe Gestalt haben sollen. Weiterhin wird die Gültigkeit der Newtonschen Theorie und der SRT in Grenzfällen vorausgesetzt.

Um nun den Feldgleichungen näher zu kommen, muss man sich zunächst von einigen klassischen geometrischen Vorstellungen lösen. Da die ART in Umgebungen mit sehr starker Massendichte angewendet werden soll, kann der Minkowskiraum der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) zur Beschreibung nicht genügen, da dieser die Abwesenheit von Gravitationsfeldern voraussetzt. Die ART soll in beliebig gekrümmten Räumen gelten, wofür eine eigene Geometrie, die Riemannsche Differentialgeometrie eingeführt wurde. Interessante Effekte dieser Geometrie sind z.B., dass Koordinaten keine Ortsvektoren mehr sind und die Abhängigkeit der Parallelverschiebung vom Weg.

Es werden neue Größen eingeführt, die den klassischen (Newtonschen) Kräften und Potentialen entsprechen, die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k und die Metrik g_{ik}. Mithilfe der verallgemeinerten Kräfte und des verallgemeinerten Potentials kann nun die klassische Poissongleichung $\nabla^2\Phi = \rho$ verallgemeinert werden. Dazu müssen zunächst noch einige neue Tensoren eingeführt werden. Diese sind der Energie-Impuls-Tensor, der die Rolle der Massendichte ρ einnimmt, der Riemannsche Krümmungstensor R_{ikj}^n, aus dessen Verschwinden folgt, dass der Raum flach ist, und der verjüngte Riemann-Tensor, der Ricci-Tensor R_{ik}. Eine weitere Verjüngung des Ricci-Tensors führt zum Krümmungsskalar R.

Nun kennen wir die nötigen Größen, um die Einsteinschen Feldgleichungen aufschreiben zu können. Dies geschieht, wie bereits erwähnt, indem wir $\nabla^2\Phi = \rho$ verallgemeinern:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = -\kappa T_i^k$$

Aus dieser Einsteinschen Feldgleichung in gemischter Form sieht man, dass die Krümmung des Raumes (durch Krümmungstensor und -skalar ausgedrückt) direkt proportional zum Energie-Impulstensor T_i^k ist. Die Kopplungskonstante κ erhält man aus dem Vergleich der ART mit der Newtonschen Theorie in den klassischen Grenzfällen (keine Materie).