Astrophysikalisches Praktikum
Himmelskoordinaten und Zeitsysteme

Leonard Burtscher

1 Einleitung

Der Versuch „Himmelskoordinaten und Zeitsysteme“ dient dem Hantieren mit den in der Astronomie verwendeten Koordinatensystemen. Außerdem kann das Phänomen der Refraktion von Licht in der Atmosphäre erlebt werden. Darüberhinaus wird der scheinbare Radius des Mondes vermessen und mithilfe der bekannten Entfernung des Mondes von der Erde sein wahrer Durchmesser berechnet. Zum Abschluss wird die geographische Position mithilfe von Koordinatenmessungen von Sternen bestimmt.

2 Messung von Winkeldifferenzen

Zum Vertrautmachen mit dem Theodoliten, einem Instrument, das vor allem in der Geologie, aber auch in der Astronomie, zur Vermessung von Winkeln eingesetzt wird, dient der Versuchsteil „Messung von Winkeldifferenzen“, der den ersten Versuchstag in Anspruch nimmt. Dabei werden zwei Winkel vermessen, unter denen die Pfeiler des Mikrostrukturlabors (MSL) vom Beobachtungspunkt, dem Dach des Lehrstuhls für Astronomie, aus erscheinen. Mithilfe trigonometrischer Überlegungen (siehe auch Praktikumsanleitung) kann aus den gemessenen Winkeln und einer gegebenen Strecke die Entfernung des MSLs berechnet werden.

a) Schätzwert Als Schätzwert für die Entfernung L2 (siehe Abb. 1) wird 175m angegeben.

b) Exakte Entfernungsbestimmung mittels Theodolit Nach Aufstellen und Justage des Theodoliten werden die Winkel α und β (siehe Abb. 1) mit dem Instrument vermessen.

Die Messwerte für die Pfeiler sind:

Pfeiler Nr.	Winkel	1. Messung (normal)	2. Messung (Gerät um 180° gedreht)
1	—	$00^\circ\,00'\,00''$	—
6	$\approx \beta$	$03^\circ\,03'\,03''$	—
12	$\approx \alpha + \beta$	$08^\circ\,50'\,19''$	$(189^\circ\,02'\,18'')$

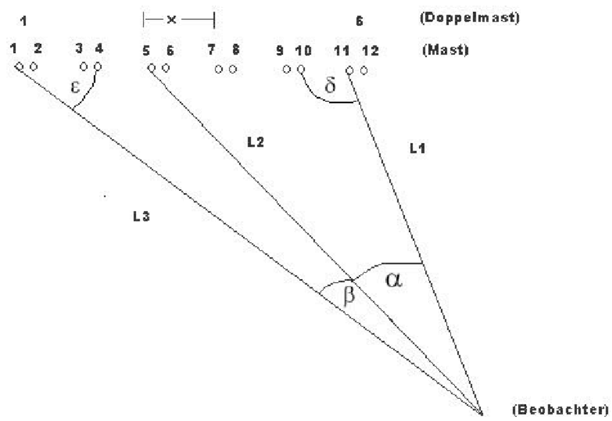

Abbildung 1: Die Pfeiler des Mikrostrukturlabors

Der Winkel zwischen Pfeiler 1 und Pfeiler 6 ist nicht gleich β, der zwischen Pfeiler 1 und Pfeiler 12 ist nicht gleich $\alpha + \beta$ (siehe Abb. 1). Dieser (sehr kleine) Unterschied wird aber in der weiteren Auswertung vernachlässigt. Die zweite Messung war wegen schlechter Lichtverhältnisse nicht mehr sehr genau.

Aus den Messwerten für β und $\alpha + \beta$ ergibt sich für α:

$$\alpha = 08^\circ\, 50'\, 19'' - 03^\circ\, 03'\, 03'' = 05^\circ\, 47'\, 16'' = 5.78778^\circ$$

Die Herleitung der Formeln für die Berechnung der Entfernungen $L1, L2, L3$ können in der Versuchs-Anleitung nachgelesen werden. Hier daher nur die Formeln zur Berechnung der Abstände in Abhängigkeit der gemessenen Winkel und der Strecke x. Die Strecke x wurde mit 6.00 m in der Anleitung gegeben. Für die Berechnung von L1 wird ein Cosinussatz angesetzt (siehe unten).

$$L_3 = \frac{10x \sin\alpha}{\sqrt{-30\sin(\alpha+\beta)\cos\beta\sin\alpha + 25\sin^2\alpha + 9\sin^2(\alpha+\beta)}} \tag{1}$$

$$L_2 = \frac{3}{5} L_3 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \tag{2}$$

$$L_2^2 = L_1^2 + (3x)^2 - 2L_1 \cdot 3x \cdot \cos\delta \tag{3}$$

Den Winkel δ erhält man aus Gleichung (4) der Anleitung:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{L_3 \sin(\alpha+\beta)}{5x}\right) \tag{4}$$

Damit folgt für L_1:

$$L_1^2 = L_2^2 - (3x)^2 - 2L_1 \cdot 3x \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{L_3\sin(\alpha+\beta)}{5x}\right)\right) \tag{5}$$

Nach Einsetzen erhält man folgende Werte für die Entfernungen:

$$L_1 = 95.2m$$
$$L_2 = 110.0m$$
$$L_3 = 120.3m$$

Der Schätzwert für $L2$ war $175m$.

Fehlerabschätzung: Zur Fehlerabschätzung wurde der Winkel $\alpha + \beta$ mit umgeschlagenem (um $180°$ gedrehtem) Instrument gemessen. Der Winkel $\alpha + \beta$ betrug so $9° \, 2' \, 18''$. Die Differenz aus den beiden Messwerten beträgt $11' \, 59''$. Geht man davon aus, dass der wahre Wert für die Summe der beiden Winkel der Mittelwert der beiden Messwerte ist, so erhält man $\Delta_{\alpha+\beta} = 5' \, 59.5''$ oder eine Abweichung von $+1.12\%$. Nimmt man dieselbe relative Abweichung für die beiden Winkel α und β an, erhält man die Mittelwerte $\overline{\alpha} = 5°47' \, 39.34''$ und $\overline{\beta} = 3° \, 3' \, 15.3''$. Daraus berechnen sich die Längen zu $\overline{L_1} = 95.2m (= L_1)$, $\overline{L_2} = 110.0m (= L_2)$ und $\overline{L_3} = 120.2m$. Der daraus berechnete Fehler (etwa 0.08%) ist freilich völlig unrealistisch, zumal bekannt war, dass der wahre Abstand L_3 etwa $140m$ beträgt. Der Fehler ließ sich also durch das Umklappen des Theodoliten nicht abschätzen.

3 Messung von Sternkoordinaten

Die folgenden Teile des Versuchs wurden am 6. November 2003 durchgeführt.

3.1 Überblick über die verwendeten Koordinatensysteme

In diesem Versuchsteil müssen oft Koordinaten aus den verschiedenen, in der beobachtenden Astronomie gebräuchlichen, Koordinatensystemen ineinander umgerechnet werden. Daher sollen hier zunächst die verwendeten Koordinatensysteme beschrieben und die Umrechnungsformeln ohne Herleitung angegeben werden.

Mit einem Theodoliten kann von einem Himmelsobjekt lediglich dessen **Azimut** a (Winkel westlich von Südrichtung) und **Höhe über dem Horizont** h bzw. **Zenitdistanz** z gemessen werden. Es gilt $z = 90° - h$. Dieses sog. *Horizontsystem* beschreibt bereits eindeutig die Position eines Objekts am Himmel – allerdings nur zu einer bestimmten Uhrzeit, da die Objekte – hauptsächlich aufgrund der Rotation der Erde – ihre Position am Himmel verändern. Um diesen Effekt auszugleichen führt man das *bewegliche Äquatorialsystem* ein. Dieses Koordinatensystem dreht sich mit dem Himmel mit, so dass die Himmelsobjekte in diesem System ruhen. Die in diesem System auftretenden Koordinaten sind **Rektaszension** RA (Abstand des Objekts vom Frühlingspunkt Υin Richtung Osten) und **Deklination** δ (Höhe über dem Himmelsäquator). Um Koordinaten aus den beiden Systemen ineinander umzurechnen, wird zusätzlich zu den beiden

Koordinaten RA und δ der **Stundenwinkel** s benötigt, der sich aus der **Sternzeit** t wie folgt berechnet:

$$s = t - RA \tag{6}$$

Die Sternzeit t für einen Beobachtungsort wird in astronomischen Jahrbüchern veröffentlicht, lässt sich aber auch mit einem Taschenrechner oder Computerprogramm (z.B. *XEphem*) aus den Koordinaten des Beobachtungsortes und der Zonenzeit (z.B. MEZ) berechnen. Mit dem Taschenrechner errechnet man die Sternzeit in Greenwich (GAST) aus der Weltzeit (UT) und der geographischen Länge λ aus folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} GAST(UT) &= GAST(0^h\,0'\,0''\,UT) + UT + 15 \cdot \frac{UT}{365.2425} && (7) \\ t_{W\ddot{u}} &= GAST(UT) + \frac{\lambda}{360°} && (8) \end{aligned}$$

Die Sternzeit in Greenwich zu Mitternacht des Beobachtungstags $GAST(0^h\,0'\,0''UT)$ muss dabei in einer Tabelle nachgeschlagen werden.

Für die Koordinatentransformationen werden ferner folgende Gleichungen benötigt:

$$\begin{aligned} z &= \arccos(\sin\phi \cdot \sin\delta + \cos\phi \cdot \cos\delta \cdot \cos s) && (9) \\ a &= \arcsin\left(\frac{\cos\delta \cdot \sin s}{\sin z}\right) && (10) \\ \delta &= \arcsin(\cos z \cdot \sin\phi - \sin z \cdot \cos\phi \cdot \cos a) && (11) \\ s &= \arcsin\left(\frac{\sin z \cdot \sin a}{\cos\delta}\right) && (12) \end{aligned}$$

Im folgenden werden außerdem die Koordinaten des Beobachtungsstandortes benötigt. Diese sind:

$$\begin{aligned} \phi &= 49°\,46'\,55.5''\,(\mathrm{N}) \\ \lambda &= -09°\,58'\,20.8''\,(\mathrm{O}) \end{aligned}$$

3.2 Messungen

Nun sollen die wahren Orte einiger heller Sterne aus mehreren Messungen mit dem Theodoliten und der berechneten Sternzeit für Würzburg bestimmt werden.

Die Sternzeit in Würzburg am 6. November 2003, 18:00 Uhr (MEZ) (= 17:00 Uhr (UT)), ist $t = 20^h\,41^m\,53^s$ (berechnet mit *XEpehem*). Für die Refraktionskorrekturen werden außerdem die Temperatur θ und der Luftdruck p des Beobachtungsortes benötigt. Diese Daten wurden von der Website *http://www.wetter.com* übernommen.

$$\theta = 7.7°\mathrm{C}$$

$$p = 1031\,\mathrm{hPa} = 1031\,\mathrm{mBar} = 774\,\mathrm{Torr}$$

Im folgenden wird die Position des Sterns Capella (α Aur) zweimal vermessen und anhand der Anleitung auf Refraktion korrigiert (siehe Tabelle 1). Dies verläuft wie folgt: Zunächst wird anhand der gemessenen Höhe h (bzw. Zenitdistanz z) die mittlere Refraktion r_0 anhand einer Tabelle bestimmt. Anschließend werden die Korrekturwerte für die Einflussgrößen Lufttemperatur A und Luftdruck B aus Tabellen abgelesen. Der Luftdruck wird darüberhinaus noch temperaturnormiert ($\rightarrow B_{korr}$).

Die korrigierte Zenitdistanz z_{korr} wird daraus wie folgt berechnet:

$$z_{korr} = z + \underbrace{r_0 \cdot (1 + A + B_{korr})}_{r}$$

Außerdem wird eine Faustregel zur Berechnung der Refraktionskorrektur überprüft:

$$z_{Faust} = z + 1' \cdot \tan(z) \tag{13}$$

Aus den Refraktions-korrigierten Zenitdistanzen, den gemessenen Azimuten und der Beobachtungszeit werden die Koordinaten im beweglichen Äquatorialsystem mithilfe der Gleichungen (11) und (12) ausgerechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Die relativen Refraktionskorrekturen betragen etwa 0.03%. Die nach Faustregel korrigierten Zenitdistanzen unterscheiden sich von den nach den Tabellen korrigierten Werten nochmals um etwa 0.03%.

Aus den gemessenen Daten ergeben sich die Koordinaten von Capella zu (gemittelt über beide Messungen) $\delta = 46°\,49'\,36.3''$ und $RA = 5^h\,23^m\,30.37^s$. Dabei wird aufgrund der besonderen Azimuteinstellung während des Versuchs (gemessen von Norden aus und in die entgegengesetzte Richtung) die Beziehung $RA = t + s - 12^h$ verwendet. Die Literaturwerte der Koordinaten von α Aur (HIP24608) betragen $\delta_{HIP} = 45°\,59'\,53.0''$ und $RA_{HIP} = 5^h\,16^m\,41.4^s$. Die Abweichungen der gemessenen Koordinaten von den Literaturwerten betragen $\Delta_\delta = 1.8\%$ und $\Delta_{RA} = 2.2\%$.

#	Zeit (MEZ)	Zenitdistanz z	Azimut a	r_0	A	B	B_{korr}
1	18:51	$360° - (290° 35' 43.5'') = 69° 24' 16.5''$	$220° 22' 23''$	$1' 10.68''$	0.0298	0.0184	0.0197
2	19:20	$360° - (293° 50' 09'') = 66° 09' 51''$	$224° 30' 00''$	$1' 01.09''$	—"—	—"—	—"—

Tabelle 1: Messwerte und Daten für die Refraktionskorrektur

#	r	z_{korr}	z_{Faust}	δ	$t_{Wü}$	s	RA
1	01' 14.3"	$69° 25' 30.8''$	$69° 26' 56''$	$46° 47' 36.7''$	$21^h 33^m 01^s$	$-4^h 09^m 23.99^s$	$5^h 23^m 37.01^s$
2	01' 04.2"	$66° 10' 55.2''$	$66° 12' 07''$	$46° 51' 35.8''$	$22^h 02^m 06^s$	$-4^h 38^m 42.28^s$	$5^h 23^m 23.72^s$
Mittelwert				**$46° 49' 36.3''$**			**$5^{\mathrm{h}} 23^{\mathrm{m}} 30.37^{\mathrm{s}}$**

Tabelle 2: korrigierte Messwerte und errechnete Positionen der Sterne im beweglichen Äquatorialsystem

4 Mondbeobachtungen

In diesem Versuchsteil sollen die Position und der scheinbare Durchmesser des Mondes gemessen werden. Da es sehr schwierig ist den genauen Mittelpunkt des Mondes mit dem Theodoliten zu finden, werden die Positionen der Ober- und Unterkante des Mondes vermessen, was wesentlich einfacher ist. Um die Koordinaten von Ober- und Unterkante zur selben Zeit zu erhalten, wird erst die Oberkante (O_1), anschließend die Unterkante (U_1) und schließlich nochmals die Oberkante (O_2) in jeweils gleichen Zeitabständen (60 s) vermessen (siehe Tabelle 3). Aus den gemessenen Werten für die Zenitdistanz $\tilde{z}$ wird aufgrund der Theodoliten-Stellung die wahre Zenitdistanz z bestimmt: $z = 360° - \tilde{z}$. Daraus kann nun die Positon der Oberkante zur Zeit der Unterkanten-Messung gemittelt werden.

Aus O_1 und O_2 errechnet sich die Zenitdistanz der Oberkante des Mondes zur Zeit der Unterkanten-Messung zu $57° 06' 13.5''$. Für den scheinbaren Monddurchmesser gilt: $\tilde{r} = \frac{\frac{O_1+O_2}{2} - U_1}{2} = 16' 21.00''$. Für den wahren Mondradius gilt schließlich $r_{Mond} = (d_{Erde-Mond} - r_{Erde}) \cdot \tan \tilde{r} = 1798 km$.

Der Monddurchmesser ergibt sich damit zu **3596 km**. Dies entspricht einer Abweichung von 3.5% vom Literaturwert 3474 km (Astronomieprogramm *StarryNight*).

	$\tilde{z}$	z	h	r_0	A	B_{korr}	r	z_{korr}
O_1	$302° 46' 48''$	$57° 13' 12''$	$32° 46' 48''$	$1' 32.9''$	-0.02869	0.0171	$1' 31.82''$	$57° 14' 43.8''$
U_1	$303° 27' 58''$	$56° 32' 02''$	$33° 27' 58''$	$1' 30.58''$	—"—	—"—	$1' 29.53''$	$56° 33' 31.5''$
O_2	$303° 03' 45''$	$56° 56' 15''$	$33° 03' 45''$	$1' 32.31''$	—"—	—"—	$1' 31.24''$	$56° 57' 46.2''$

Tabelle 3: Messwerte und Daten für die Refraktionskorrektur der Mondbeobachtung

5 Bestimmung des geographischen Ortes nach dem Standlinienverfahren

5.1 Einleitung

Um die geographische Position zu bestimmen mussten Seefahrer früher die Sterne zu Hilfe nehmen. Mithilfe des sogenannten *Standlinienverfahrens* ist es möglich aus zwei gemessenen Sternpositionen und der möglichst genau bekannten Uhrzeit die eigene geographische Position zu bestimmen. Als Hilfsmittel werden lediglich ein Winkelmesser (Sextant) und ein Stern-Almanach mit den Positionen der Sternen (im beweglichen Äquatorialsystem) benötigt. Die größte Messungenauigkeit lag in der genauen Bestimmung der Uhrzeit an einem Referenzort (z.B. Greenwich). Schließlich bedeutet eine Minute Ungenauigkeit in der Uhrzeit bereits eine Ortsunschärfe von $15'$ oder etwa 30 km (am Äquator). Im 17. Jahrhundert war es zwar möglich die Ortszeit genau zu bestimmen, die Zeit eines bestimmten Ortes (z.B. Greenwich) genau zu behalten, war hingegen nicht möglich. Letzteres ist aber für die Astro-Navigation notwendig. Dieses Problem gipfelte in der Ausschreibung eines Preisgelds von 20.000 £ durch die britische Regierung im Jahre 1714 für denjenigen, der als erster eine Uhr bauen konnte, die auf der Fahrt von Großbritannien nach Indien nicht mehr als zwei Minuten falsch ging. Der Preis wurde nach einigem Hin und Her erst im Jahre 1773 an den Zimmermann John Harrison ausbezahlt.

Ein Stern mit den äquatorialen Koordinaten RA und δ steht zur Zeit GAST (Ortssternzeit Greenwich) im Zenit eines Ortes (Zenitort) der Erde mit den geographischen Koordinaten $\lambda_z = GAST - RA$, $\phi_z = \delta$. $RA = t_z$ (t_z: Sternzeit am Zenitort), wegen $RA = t - s$ mit $s = 0$ (Objekt ist in oberer Kulmination). Mit $GAST - t_z = \lambda_z$ erhält man $\lambda_z = GAST - RA$.

An allen Orte, die sich in gleicher Entfernung vom Zenitort befinden, misst man dieselbe Zenitdistanz z des Objektes. Wenn man nun also die Zenitdistanz eines Objekts kennt, weiß man, dass seine Position auf einem Kreis, der sogenannten *Standlinie* um den Zenitort liegen muss. Misst man die Zenitdistanz eines zweiten Objekts, erhält man zwei Schnittpunkte. Einer von beiden ist der eigene Standort. Kennt man nun seinen Standort wenigstens ungefähr (z.B. aus einer Messung des Vortages bzw. aus der geographischen Position des Heimathafens) hat man seine Position bestimmt.

5.2 Praktisches Vorgehen

Zur Durchführung misst man die Zenitdistanz $z_{beob}(t)$ und den Azimut mindestens zweier Sterne und berechnet die Zenitdistanz $z_c(t)$ der Sterne für den ungefähr bekannten Standort (der *gegißte Ort*). Daraus errechnet man die Differenz

$$\Delta z = z_c(t) - z_{beob}(t) \tag{14}$$

.

Stern	Uhrzeit (MEZ)	Sternzeit t	z_m	a_m	RA	δ
Vega	19:00	21:42:02	$35° \, 07' \, 27''$	$268° \, 38' \, 33''$	$18^h \, 36^m \, 56.30^s$	$38° \, 47' \, 01.0''$
Mizar B	19:30	22:12:07	$65° \, 54' \, 57''$	$328° \, 44' \, 31''$	$13^h \, 23^m \, 56.40^s$	$54° \, 55' \, 18''$

Tabelle 4: Messwerte für das Standlinienverfahren

Stern	z_w	a_w	z_g	a_g
Vega	$34° \, 15' \, 34''$	$269° \, 16' \, 47''$	$34° \, 16' \, 50''$	$268° \, 58' \, 54''$
Mizar B	$67° \, 51' \, 33''$	$332° \, 32' \, 40''$	$67° \, 40' \, 28''$	$332° \, 31' \, 05''$

Tabelle 5: Berechnete Werte für das Standlinienverfahren

Für $\Delta z < 0$ ist der wahre Ort weiter vom Zenitort entfernt als der gegißte Ort, für $\Delta z > 0$ gilt entsprechend das umgekehrte.

Im Praktikum wird das graphische Verfahren zur Bestimmung des Ortes verwendet. Mit der Annahme, dass der betrachtete Landkartenausschnitt klein ist gegen den Erddurchmesser werden die Standlinien zu Geraden und der Ausschnitt lässt sich bequem auf einer Ebene zeichnen, siehe Abb. 2.

Mit einem geeigneten Maßstab wird nun das Azimutkoordinatensystem gezeichnet. Die Azimutstrahlen zu den Sternen werden gemäß dem gemessenen Azimutwinkel (positiv in Richtung Osten, negativ in Richtung Westen) eingetragen. Dann wird auf den Azimutstrahlen die in (14) berechnete Zenitdistanz-Differenz abgetragen. Positives Δz wird in Richtung des Sterns (Pfeilspitze) abgetragen, negatives in die entgegengesetzte Richtung. Am Ende der so definierten Strecke wird senkrecht zum Azimutstrahl jeweils eine Gerade (die Standlinie) gezeichnet. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der neue Standort.

5.3 Durchführung

Da die sich die gemessenen Zenitdistanzen z_m und Azimute a_m von den zur Überprüfung für den wahren Standort ausgerechneten Koordinaten z_w, a_w auch nach Refraktionskorrektur mehr unterscheiden als von den gegißten Zenitdistanzen z_c, a_c, ist mit dem gemessenen Sternkoordinaten keine Verbesserung des vom Betreuer vorgegebenen gegißten Ortes $\phi = 50° \, 00' \, 00''$(N), $\lambda = -10° \, 00' \, 00''$ (O) zu erreichen.

Daher werden die gemessenen Werte verworfen und das Verfahren wird mit berechneten Zenitdistanzen durchgeführt. Sowohl die Zenitdistanzen für den wahren Standort als auch die Zenitdistanzen für den gegißten Standort werden also mit dem Astronomieprogramm XEphem berechnet. Die Werte entnehme man den Tabellen 4 und 5.

Mit den berechneten „gemessenen“ Sternkoordinaten war die geographische Position recht genau bestimmbar. Aus der Zeichnung (siehe nochmals Abb. 2) ergibt sich eine Positionskorrektur von

$\Delta_\phi = -13'\,22''$ und $\Delta_\lambda = -1'48''$, womit sich der neue Standort zu

$$\phi = +49^\circ\,46'\,38''(N); \quad \lambda = -9^\circ\,58'\,12''(O)$$

ergab. Dies entspricht nur noch einer Abweichung um $\delta_\phi = 17.5''$ und $\delta_\lambda = 8.8''$.

Zum großen Fehler der Messwerte ist anzumerken, dass die Vermessung der Sternpositionen mit dem Theodoliten ohne ein beleuchtetes Fadenkreuzokular nur sehr ungenau möglich ist, da das Fadenkreuz kaum sichtbar ist.

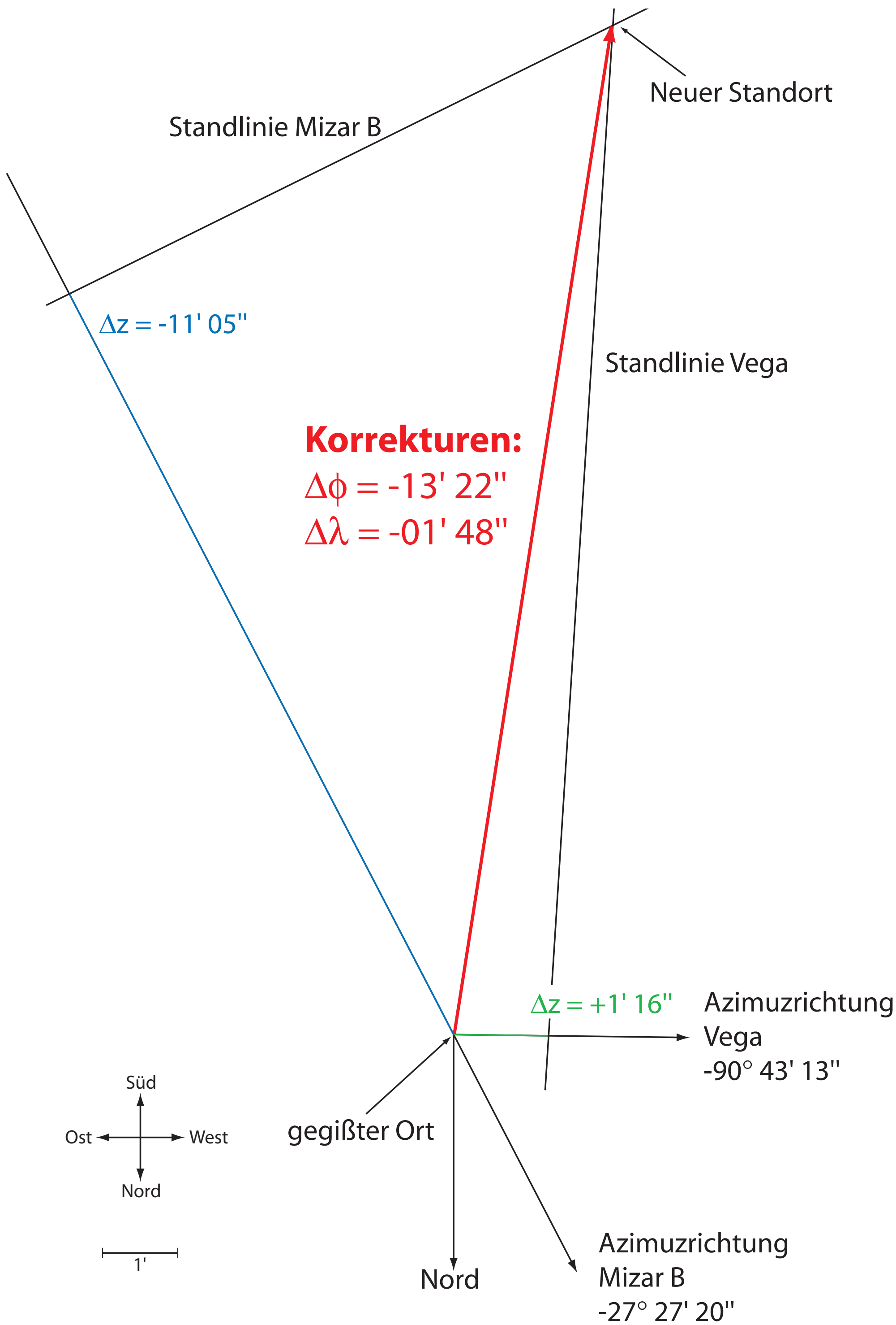

Abbildung 2: Konstruktion des Standlinienverfahrens. Auf den vom gegißten Ort ausgehenden Azimutstrahlen der beiden gemessenen Sterne werden die berechneten Zenitdistanz-Differenzen (blau für Mizar, grün für Vega) abgetragen. Am Ende der so definierten Strecke wird senkrecht zum Azimutstrahl jeweils eine Gerade (die Standlinie) gezeichnet. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der neue Standort. Die Koordinatenkorrekturen sind in rot angegeben.